Nouvelle-Calédonie mars 2015

On note (u_n) et (v_n) les suites réelles définies, pour tout entier naturel *n*, par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{3}\,u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + \sqrt{3}\,v_n \end{cases}$.

1. Calculer les valeurs de u_1, v_1, u_2, v_2.
2. On souhaite construire un algorithme qui affiche les valeurs de u_N et v_N pour un entier naturel ℕ donné.

a. On donne l'algorithme suivant :

Entrée	N est un nombre entier
Variables	K est un nombre entier
	S est un nombre réel
	T est un nombre réel
Initialisation	Affecter 1 à S
	Affecter 0 à T
	Affecter 0 à K
Traitement	Tant que K < N
	Affecter $\sqrt{3}\,\mathrm{S} - \mathrm{T}$ à S
	Affecter $\mathrm{S} + \sqrt{3}\,\mathrm{T}$ à T
	Affecter K + 1 à K
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher S
	Afficher T

Faire fonctionner cet algorithme pour N = 2. Pour cela, on recopiera et complétera le tableau de variables ci-dessous :

S	T	K
1	0	0
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1

b. L'algorithme précédent affiche-t-il les valeurs de u_N et v_N pour un entier N donné ?
Dans le cas contraire, écrire sur la copie une version corrigée de l'algorithme proposé qui affiche bien les valeurs de u_N et v_N pour un entier N.

3. On pose, pour tout entier naturel *n*, $z_n = u_n + \mathrm{i}\, v_n$.

On note *a* le nombre complexe $a = \sqrt{3} + \mathrm{i}$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, $z_{n+1} = a\, z_n$.

b. Écrire *a* sous forme exponentielle.

c. En déduire que, pour tout entier naturel *n* : $\begin{cases} u_n = 2^n \cos\left(\dfrac{n\pi}{6}\right) \\ v_n = 2^n \sin\left(\dfrac{n\pi}{6}\right) \end{cases}$

CORRECTION

1. $\begin{cases} u_1 = \sqrt{3}\,u_0 - v_0 = \sqrt{3} \\ v_1 = u_0 + \sqrt{3}\,v_0 = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} u_2 = \sqrt{3}\,u_1 - v_1 = 2 \\ v_2 = u_1 + \sqrt{3}\,v_1 = 2\sqrt{3} \end{cases}$

2. *a*.

S	T	K
1	0	0
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1
$\sqrt{3}\,S - T = 3 - \sqrt{3}$	$S + \sqrt{3}\,T = 3 - \sqrt{3} + \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 6 - \sqrt{3}$	2

b. L'algorithme précédent n'affiche pas les valeurs de u_n et v_n pour un entier N = 2.
Il faut introduire une nouvelle variable U, qui stockera u_n le temps de la boucle de l'algorithme

Entrée	N est un nombre entier
Variables	K est un nombre entier
	S est un nombre réel
	T est un nombre réel
Initialisation	Affecter 1 à S
	Affecter 0 à T
	Affecter 0 à K
Traitement	Tant que K < N
	Affecter S à U
	Affecter $\sqrt{3}$ U – T à S
	Affecter U + $\sqrt{3}$ T à T
	Affecter K + 1 à K
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher S
	Afficher T

3. *a*. $z_{n+1} = u_{n+1} + \mathrm{i}\,v_{n+1} = \sqrt{3}\,u_n - v_n + \mathrm{i}\,(u_n + v_n\sqrt{3}\,) \Leftrightarrow z_{n+1} = (\sqrt{3} + \mathrm{i}\,)\,u_n + \mathrm{i}\,(\sqrt{3} + \mathrm{i}\,)v_n$
$z_{n+1} = (\sqrt{3} + \mathrm{i}\,)\,(u_n + \mathrm{i}\,v_n\,)$ donc $z_{n+1} = a\,z_n$ avec $a = \sqrt{3} + \mathrm{i}$.

b. $|\,a\,| = \sqrt{\sqrt{3}^{\,2} + 1^2} = 2$

$\sqrt{3} + \mathrm{i} = 2\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ donc $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ donc $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ donc $a = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

c. $z_{n+1} = a\,z_n$ avec $a = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ donc (z_n) est une suite géométrique de raison a de premier terme $z_0 = u_0 + \mathrm{i}\,v_0 = 1$
$z_n = a^n\,z_0 = a^n$
$z_n = 2^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\frac{\pi}{6}} = 2^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\dfrac{n\pi}{6}\right)$ donc $u_n + \mathrm{i}\,v_n = 2^n\cos\dfrac{n\pi}{6} + \mathrm{i}\;2^n\sin\dfrac{n\pi}{6}$

En égalant les parties réelles et les parties imaginaires : $\begin{cases} u_n = 2^n\cos\left(\dfrac{n\pi}{6}\right) \\ v_n = 2^n\sin\left(\dfrac{n\pi}{6}\right) \end{cases}$.