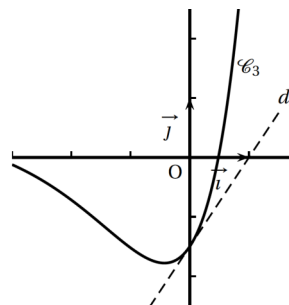
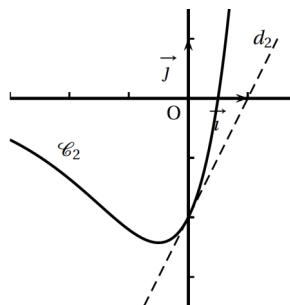
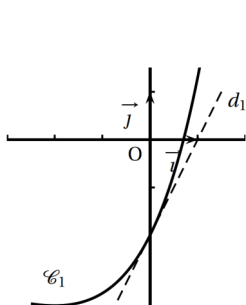
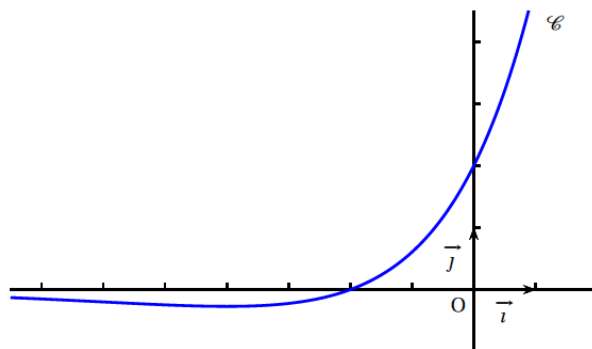


Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $\mathbf{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathbf{C}$ et trois autres courbes $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ avec la tangente en leur point d'abscisse 0.



1. Donner par lecture graphique, le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x .
2. On désigne par F une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
 - a. À l'aide de la courbe $\mathbf{C}$, déterminer $F'(0)$ et $F'(-2)$.
 - b. L'une des courbes $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ est la courbe représentative de la fonction F . Déterminer laquelle en justifiant l'élimination des deux autres.

Partie B

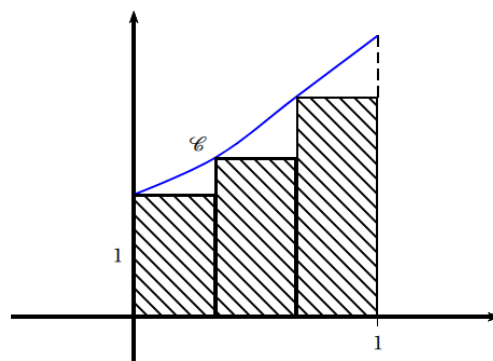
Dans cette partie, on admet que la fonction f évoquée dans la **partie A** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{2}x}$.

1. L'observation de la courbe $\mathbf{C}$ permet de conjecturer que la fonction f admet un minimum.
 - a. Démontrer que pour tout réel x , $f'(x) = \frac{1}{2}(x+4)e^{\frac{1}{2}x}$.
 - b. En déduire une validation de la conjecture précédente.
2. On pose $I = \int_0^1 f(x) dx$
 - a. Interpréter géométriquement le réel I .
 - b. Soient u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x$ et $v(x) = e^{\frac{1}{2}x}$. Vérifier que $f = 2(u'v + uv')$.
 - c. En déduire la valeur exacte de l'intégrale I .
3. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	k et n sont des nombres entiers naturels. s est un nombre réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n .
Initialisation :	Affecter à s la valeur 0.
Traitement :	Pour k allant de 0 à $n-1$ Affecter à s la valeur $s + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ Fin de boucle.
Sortie :	Afficher s .

On note s_n le nombre affiché par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre un entier naturel strictement positif comme valeur de n .

- a. Justifier que s_3 représente l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous où les trois rectangles ont la même largeur.
- b. Que dire de la valeur de s_n fournie par l'algorithme proposé lorsque n devient grand ?



CORRECTION

Partie A

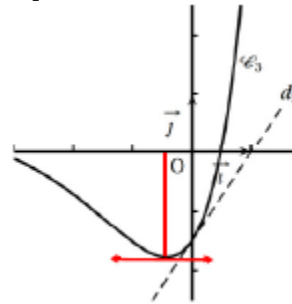
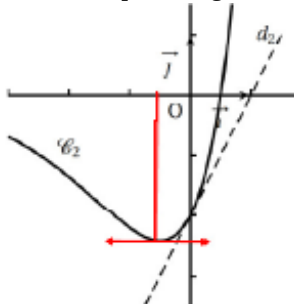
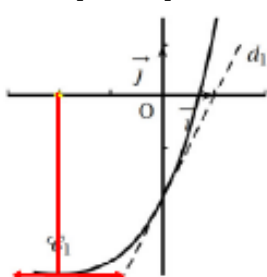
1. Graphiquement : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$; $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < -2$; $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > -2$

2. a. F une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ donc $F' = f$. $F'(0) = f(0) = 2$ $F'(-2) = f(-2) = 0$

b. F une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ donc $F' = f$ donc F est décroissante sur $] -\infty ; -2]$ et F est croissante sur $[-2 ; +\infty [$.

$F'(-2) = f(-2) = 0$ donc la courbe représentative de F admet au point d'abscisse -2 une tangente horizontale.

$\mathbf{C}_2$ et $\mathbf{C}_3$ ne remplissent pas ces conditions donc ne conviennent pas : tangente non horizontale en -2 pour les deux courbes.



Partie B

1. L'observation de la courbe $\mathbf{C}$ permet de conjecturer que la fonction f admet un minimum.

$$a. \begin{cases} u(x) = x + 2 & u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{\frac{1}{2}x} & v'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} \end{cases} \text{ donc } f'(x) = e^{\frac{1}{2}x} + (x + 2) \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x}.$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} [2 + (x + 2)] = \frac{1}{2} (x + 4) e^{\frac{1}{2}x}$$

b. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x)$ a le même signe que $x + 4$

si $x \leq -4$, $f'(x) \leq 0$

si $x \geq -4$, $f'(x) \geq 0$ donc f admet un minimum pour $x = -4$

2. a. La fonction f est définie continue positive sur $[0 ; 1]$ donc I est l'aire de la partie de plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

$$b. \begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{\frac{1}{2}x} & v'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} \end{cases} \text{ donc } 2(u'v + uv') (x) = 2 e^{\frac{1}{2}x} + x e^{\frac{1}{2}x} = (x + 2) e^{\frac{1}{2}x} \text{ donc } f = 2(u'v + uv').$$

c. $f = 2(u'v + uv') = 2(uv)'$ donc une primitive de f est la fonction F telle que $F = 2uv$

$$I = F(1) - F(0) = 2 \times 1 e^{\frac{1}{2}} - 2 \times 0 e^0 = 2e^{\frac{1}{2}}$$

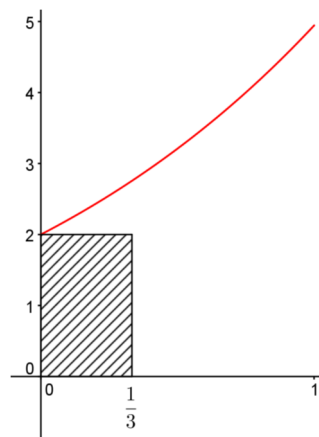
3. a.

Initialisation $s = 0$

Pour $k = 0$, $\frac{1}{3} f(0)$ est l'aire du rectangle de largeur $\frac{1}{3}$ de

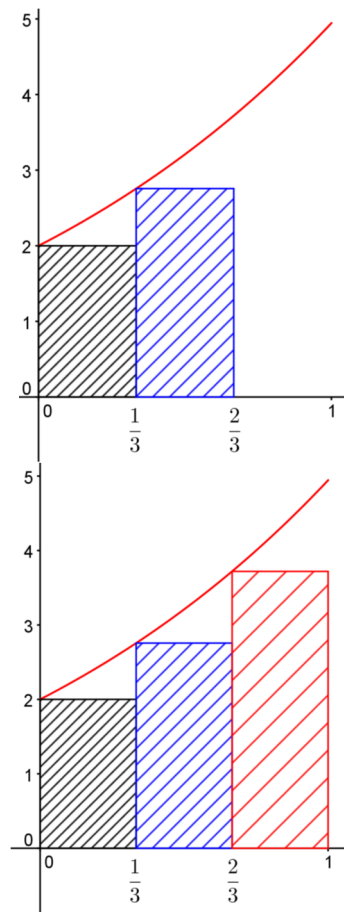
longueur $f(0)$ soit l'aire du rectangle hachuré :

donc s prend la valeur égale à l'aire hachurée en noir



Pour $k = 1$, à cette aire on ajoute $\frac{1}{3} f\left(\frac{1}{3}\right)$ donc on ajoute l'aire du rectangle de largeur $\frac{1}{3}$ de longueur $f\left(\frac{1}{3}\right)$ soit l'aire du rectangle hachuré en bleu
 s prend donc la valeur égale à la somme des deux aires hachurées.

Pour $k = 2$, à cette aire on ajoute $\frac{1}{3} f\left(\frac{2}{3}\right)$ donc on ajoute l'aire du rectangle de largeur $\frac{1}{3}$ de longueur $f\left(\frac{2}{3}\right)$ soit l'aire du rectangle hachuré en rouge.
 s prend donc la valeur égale à la somme des trois aires hachurées.
 L'algorithme s'arrête donc s_3 représente l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-contre



b. L'affichage de l'algorithme obtenu après n boucles (de $k = 0$ à $k = (n-1)$) est la somme de n termes qui sont de la forme $\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ donc l'affichage est : $\frac{1}{n} f(0) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)$.

C'est la somme des aires des rectangles « sous la courbe » et au dessus de l'axe des x entre $x = 0$ et $x = 1$, leur largeur vaut $\frac{1}{n}$ leur longueur $f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Quand n devient grand, s_n se rapproche de $I = \int_0^1 f(x) dx$.