

Dans l'ensemble du sujet, et pour chaque question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 1 (4 points) Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples comportant quatre questions indépendantes. Pour chaque question, une seule des quatre affirmations proposées est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à l'affirmation exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point ; une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Question 1

Dans un hypermarché, 75 % des clients sont des femmes. Une femme sur cinq achète un article au rayon bricolage, alors que sept hommes sur dix le font.

Une personne, choisie au hasard, a fait un achat au rayon bricolage.

La probabilité que cette personne soit une femme a pour valeur arrondie au millième :

- a. 0,750 b. 0,150 c. 0,462 d. 0,700

Question 2

Dans cet hypermarché, un modèle d'ordinateur est en promotion. Une étude statistique a permis d'établir que, chaque fois qu'un client s'intéresse à ce modèle, la probabilité qu'il l'achète est égale à 0,3. On considère un échantillon aléatoire de dix clients qui se sont intéressés à ce modèle.

La probabilité qu'exactement trois d'entre eux aient acheté un ordinateur de ce modèle a pour valeur arrondie au millième

- a. 0,900 b. 0,092 c. 0,002 d. 0,267

Question 3

Cet hypermarché vend des téléviseurs dont la durée de vie, exprimée en année, peut être modélisée par une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle de paramètre λ . La durée de vie moyenne d'un téléviseur est de huit ans, ce qui se traduit par : $\lambda = \frac{1}{8}$.

La probabilité qu'un téléviseur pris au hasard fonctionne encore au bout de six ans a pour valeur arrondie au millième

- a. 0,750 b. 0,250 c. 0,472 d. 0,528

Question 4

Cet hypermarché vend des baguettes de pain dont la masse, exprimée en gramme, est une variable aléatoire réelle qui suit une loi normale de moyenne 200 g. La probabilité que la masse d'une baguette soit comprise entre 184 g et 216 g est égale à 0,954.

La probabilité qu'une baguette prise au hasard ait une masse inférieure à 192 g a pour valeur arrondie au centième

- a. 0,16 b. 0,32 c. 0,84 d. 0,48

Exercice 2 (-4 points) Commun à tous les candidats

On définit pour tout entier naturel n , les nombres complexes z_n par :

$$\begin{cases} z_0 = 16 \\ z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n \end{cases} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = |z_n|$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on considère les points A_n d'affixes z_n .

1. a. Calculer z_1 , z_2 et z_3 .
- b. Placer les points A_1 et A_2 sur le graphique de l'annexe, à rendre avec la copie.
- c. Écrire le nombre complexe $\frac{1+i}{2}$ sous forme trigonométrique.
- d. Démontrer que le triangle OA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1 .

2. Démontrer que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$. La suite (r_n) est-elle convergente ?

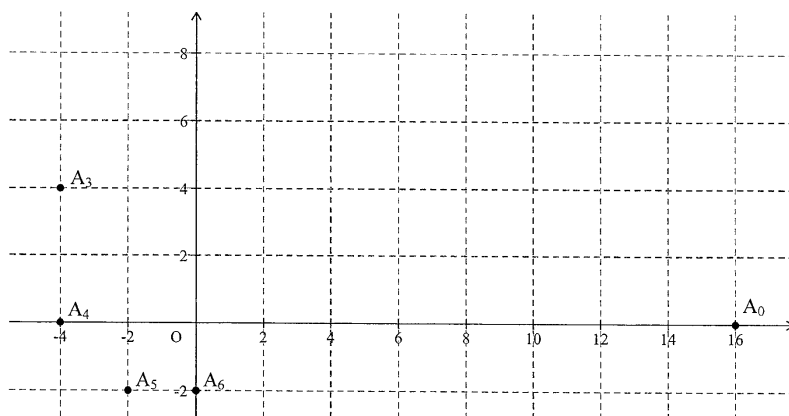
Interpréter géométriquement le résultat précédent.

On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3 etc.

Ainsi $L_n = \sum_{i=0}^{i=n-1} A_i A_{i+1} = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n$.

3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $A_n A_{n+1} = r_{n+1}$.
- b. Donner une expression de L_n en fonction de n .
- c. Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n) .

Annexe



Exercice 3 (7 points) Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes.

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel x de la façon suivante

- $x = 0$ pour le blanc;
 - $x = 1$ pour le noir;
- $x = 0,01$; $x = 0,02$ et ainsi de suite jusqu'à $x = 0,99$ par pas de 0,01 pour toutes les nuances intermédiaires (du clair au foncé).

L'image A, ci-après, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.

Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ». Une fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ est dite « fonction de retouche » si elle possède les quatre propriétés suivantes :

- $f(0) = 0$;
- f est continue sur l'intervalle $[0 ; 1]$;
- f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

Une nuance codée x est dite assombrie par la fonction f si $f(x) > x$, et éclaircie si $f(x) < x$.

Ainsi, si $f(x) = x^2$, un pixel de nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $0,2^2 = 0,04$.

L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.

Si $f(x) = \sqrt{x}$, la nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $\sqrt{0,2} \approx 0,45$.

L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous.

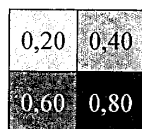


Image A

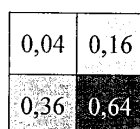


Image B

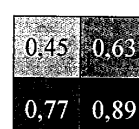


Image C

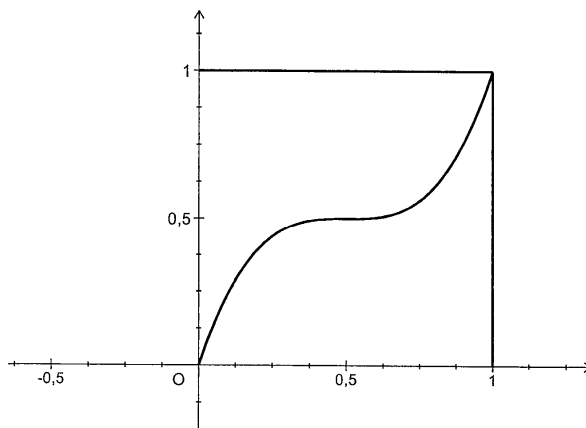
Partie A

1. On considère la fonction f , définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par : $f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x$.

a. Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.

b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f_1(x) \leq x$, à l'aide du graphique donné en annexe, à rendre avec la copie, en faisant apparaître les pointillés utiles.

Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombriement.



2. On considère la fonction f_2 définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par : $f_2(x) = \ln(1 + (e - 1)x)$.

On admet que f_2 est une fonction de retouche.

On définit sur l'intervalle $[0 ; 1]$ la fonction g par : $g(x) = f_2(x) - x$.

a. Établir que, pour tout x de l'intervalle $[0 ; 1]$: $g'(x) = \frac{(e-2) - (e-1)x}{1 + (e-1)x}$

b. Déterminer les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

Démontrer que la fonction g admet un maximum en $\frac{e-2}{e-1}$, maximum dont une valeur arrondie au centième est 0,12.

c. Établir que l'équation $g(x) = 0,05$ admet sur l'intervalle $[0 ; 1]$ deux solutions α et β , avec $\alpha < \beta$.

On admettra que : $0,08 < \alpha < 0,09$ et que : $0,85 < \beta < 0,86$.

Partie B

On remarque qu'une modification de nuance n'est perceptible visuellement que si la valeur absolue de l'écart entre le code de la nuance initiale et le code de la nuance modifiée est supérieure ou égale à 0,05.

Dans l'algorithme décrit ci-dessous, f désigne une fonction de retouche. Quel est le rôle de cet algorithme ?

Variables :	x (nuance initiale) y (nuance retouchée) E (Écart) c (compteur) k
Initialisation :	c prend la valeur 0
Traitement :	Pour k allant de 0 à 100, faire x prend la valeur $\frac{k}{100}$ y prend la valeur $f(x)$ E prend la valeur $ y - x $ Si $E \geq 0,05$, faire c prend la valeur $c + 1$ Fin si
Sortie :	Fin pour Afficher c

2. Quelle valeur affichera cet algorithme si on l'applique à la fonction f_2 définie dans la deuxième question de la partie A ?

Partie C

Dans cette partie, on s'intéresse à des fonctions de retouche f dont l'effet est d'éclaircir l'image dans sa globalité, c'est-à-dire telles que, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$, $f(x) \leq x$.

On décide de mesurer l'éclaircissement global de l'image en calculant l'aire A_f de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f , et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Entre deux fonctions, celle qui aura pour effet d'éclaircir le plus l'image sera celle correspondant à la plus petite aire.

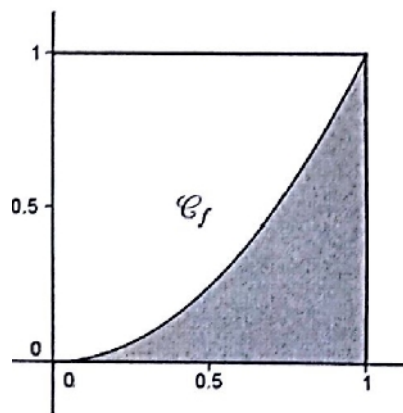
On désire comparer l'effet des deux fonctions suivantes, dont on admet qu'elles sont des fonctions de retouche :

$$f_3(x) = x e^{(x^2-1)} \quad f_4(x) = 4x - 15 + \frac{60}{x+4}.$$

a. Calculer A_{f_3} .

b. Calculer A_{f_4} .

De ces deux fonctions, laquelle a pour effet d'éclaircir le plus l'image ?



Exercice 4 (5 points) Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit $\vec{u}(1, b, c)$ un vecteur de l'espace, où b et c désignent deux nombres réels.

a. Déterminer les valeurs de b et c telles que \vec{u} soit un vecteur normal au plan (ABC).

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x - 2y + z - 4 = 0$.

c. Le point D appartient-il au plan (ABC) ?

3. On considère la droite **D** de l'espace dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -4t + 5 \\ z = 2t - 1 \end{cases}$$
 où t est un nombre réel.

a. La droite **D** est-elle orthogonale au plan (ABC) ?

- b. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite **D** et du plan (ABC).
 4. Étudier la position de la droite (DE) par rapport au plan (ABC).

Exercice 4 (5 points)

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Partie A : préliminaires

1. a. Soient n et N deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, tels que $n^2 \equiv N - 1$ modulo N .
 Montrer que : $n \times n^3 \equiv 1$ modulo N .

b. Dédire de la question précédente un entier k_1 tel que : $5 k_1 \equiv 1$ modulo 26.

On admettra que l'unique entier k tel que : $0 \leq k \leq 25$ et $5 k \equiv 1$ modulo 26 vaut 21.

2. On donne les matrices : $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

a. Calculer la matrice $6A - A^2$.

b. En déduire que A est inversible et que sa matrice inverse, notée A^{-1} , peut s'écrire sous la forme $A^{-1} = \alpha I + \beta A$, où α et β sont deux réels que l'on déterminera.

c. Vérifier que : $B = 5A^{-1}$.

d. Démontrer que si $AX = Y$, alors $5X = BY$.

Partie B : procédure de codage

Coder le mot « ET », en utilisant la procédure de codage décrite ci-dessous.

- Le mot à coder est remplacé par la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, où x_1 est l'entier représentant la première lettre du mot et x_2 l'entier représentant la deuxième, selon le tableau de correspondance ci-dessous.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- La matrice X est transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y = AX$.
- La matrice Y est transformée en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, où r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.
- Les entiers r_1 et r_2 donnent les lettres du mot codé, selon le tableau de correspondance ci-dessous.

Exemple: « OU » (mot à coder) $\rightarrow X = \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 76 \\ 82 \end{pmatrix} \rightarrow R = \begin{pmatrix} 24 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow$ « YE » (mot codé).

Partie C : procédure de décodage (on conserve les mêmes notations que pour le codage)

Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y = AX$.

1. Démontrer que $\begin{cases} 5x_1 = 2y_1 - y_2 \\ 5x_1 = -3y_1 + 4y_2 \end{cases}$.

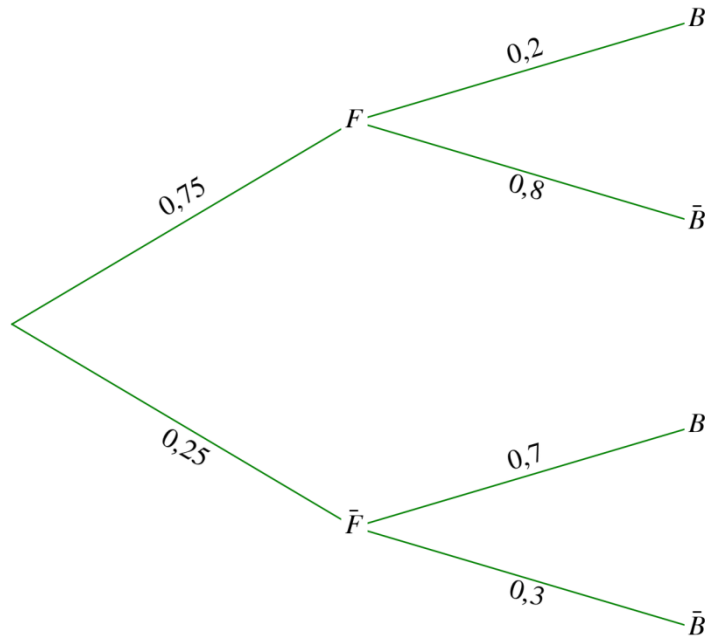
2. En utilisant la question 1. b. de la partie A, établir que : $\begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + 5y_2 \\ x_1 \equiv 15y_1 + 6y_2 \end{cases}$ modulo 26

3. Décoder le mot « QP ».

CORRECTION

Exercice 1 (4 points) Commun à tous les candidats

Question 1 Réponse c



$$p(B) = p(B \cap F) + p(B \cap \bar{F}) = 0,75 \times 0,2 + 0,25 \times 0,7$$

$$p(B) = 0,15 + 0,175 = 0,325$$

$$p_B(F) = \frac{p(B \cap F)}{p(B)} = \frac{0,15}{0,325} = 0,462$$

Question 2 Réponse d

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de clients ayant acheté un ordinateur de ce modèle.

On a une succession de 10 expériences aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :

- succès : le client a acheté un ordinateur de ce modèle ($p = 0,3$)
- échec : le client n'a pas acheté d'ordinateur de ce modèle ($q = 0,7$)

donc X suit une loi binomiale de paramètres $(10 ; 0,3)$

$$p(X = 3) = 0,267$$

Question 3 Réponse c

Cet hypermarché vend des téléviseurs dont la durée de vie, exprimée en année, peut être modélisée par une variable aléatoire réelle

qui suit une loi exponentielle de paramètre λ . La durée de vie moyenne d'un téléviseur est de huit ans, ce qui se traduit par : $\lambda = \frac{1}{8}$.

La probabilité qu'un téléviseur pris au hasard fonctionne encore au bout de six ans a pour valeur arrondie au millième

X suit une loi exponentielle de paramètre λ donc $p(X \geq t) = e^{-\lambda \cdot t}$

$$p(X \geq 6) = e^{-\frac{1}{8} \times 6} \approx 0,472$$

Question 4 Réponse a

σ est inconnu donc soit $T = \frac{X - 200}{\sigma}$, T suit une loi normale centrée réduite.

$$p(184 \leq X \leq 216) = 0,954 \Leftrightarrow P\left(\frac{184 - 200}{\sigma} \leq T \leq \frac{216 - 200}{\sigma}\right) = 0,954 \Leftrightarrow P\left(\frac{-16}{\sigma} \leq T \leq \frac{16}{\sigma}\right) = 0,954 \text{ donc } \frac{16}{\sigma} = 1,995 \text{ donc}$$

$$\sigma = \frac{16}{1,995}$$

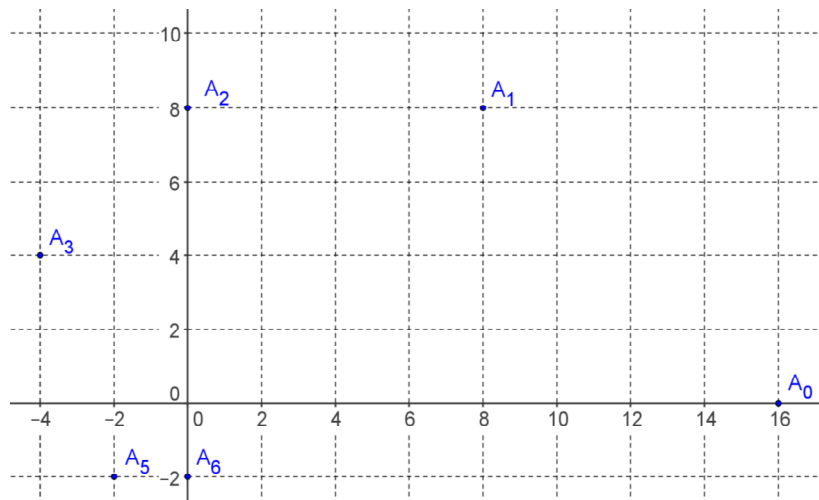
$$\sigma = 8,02 \text{ donc } p(X \leq 192) \approx 0,16$$

Exercice 2 (-4 points) Commun à tous les candidats

1. a. $z_1 = \frac{1+i}{2} \times 16 = 8 + 8i$

$z_2 = \frac{1+i}{2} \times 8(1+i) = 8i$ et $z_3 = \frac{1+i}{2} \times 8i = -4 + 4i$

b.



c. $\left| \frac{1+i}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \theta + i \sin \theta)$ donc $\begin{cases} \sqrt{2} \cos \theta = 1 \\ \sqrt{2} \sin \theta = 1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ à 2π près

$\frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$.

d. $OA_0 = |z_0| = 16$, $A_0A_1 = |8 + 8i - 16| = 8|-1 + i| = 8\sqrt{2}$

$OA_1 = |z_1| = 8|1+i| = 8\sqrt{2}$.

$A_0A_1 = OA_1$ et $A_0A_1^2 + OA_1^2 = 8^2 \times 2 + 8^2 \times 2 = 16^2 = OA_0^2$ donc le triangle OA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1 .

2. $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$ donc $|z_{n+1}| = \left| \frac{1+i}{2} \right| |z_n|$ donc $r_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} r_n$ donc la suite (r_n) est géométrique, de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$r_n = q^n r_0$ avec $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $r_0 = 16$

$-1 < q < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$

La suite (r_n) converge vers 0 donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} OA_n = 0$, les points A_n tendent vers O.

3. a. $A_nA_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = \left| \frac{1+i}{2} z_n - z_n \right| = \left| \frac{-1+i}{2} z_n \right|$

$A_nA_{n+1} = \left| \frac{-1+i}{2} \right| |z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2} r_n = r_{n+1}$

b. $L_n = r_1 + r_2 + \dots + r_n = r_1 (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1})$ avec $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $L_n = r_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$ donc $L_n = 8\sqrt{2} \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = r_1 \frac{1}{1 - q} = \frac{8\sqrt{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$.

On pouvait transformer l'expression et prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = 16 + 16\sqrt{2}$

Exercice 3 (7 points) Commun à tous les candidats

Partie A

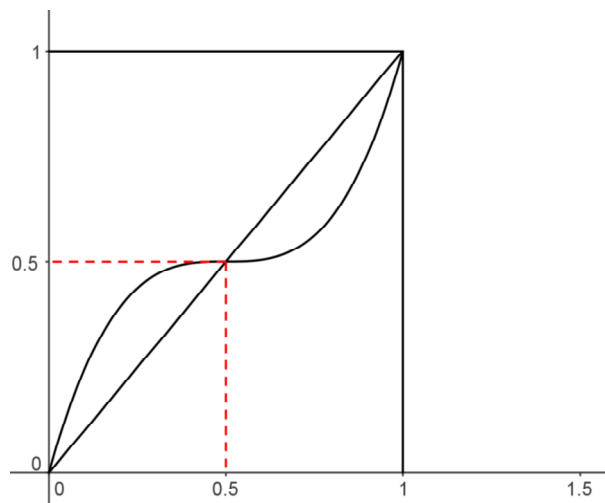
1. a. Vérification :

- $f_1(0) = 0$;
- f_1 est un polynôme donc continue sur l'intervalle $[0 ; 1]$;
- $f'_1(x) = 12x^2 - 12x + 3 = 3(4x^2 - 4x + 1) = 3(2x - 1)^2$

donc pour tout x de $[0 ; 1]$, $f'_1(x) \geq 0$ donc f_1 est croissante sur l'intervalle $[0 ; 1]$. La fonction f_1 est une fonction de retouche.

b. Graphiquement $f_1(x) \leq x \Leftrightarrow 0,5 \leq x \leq 1$

La fonction f_1 éclaircira les nuances inférieures à 0,5 et assombriera celles supérieures à 0,5.



$$2. a. \quad g'(x) = \frac{(e-1)}{1+(e-1)x} - 1 \text{ donc } g'(x) = \frac{(e-1) - 1 - (e-1)x}{1+(e-1)x}$$

$$\text{donc pour tout } x \text{ de l'intervalle } [0 ; 1] : g'(x) = \frac{(e-2) - (e-1)x}{1+(e-1)x}$$

b. $e > 1$ donc $e - 1 > 0$, $x \in [0 ; 1]$ donc $1 + (e - 1)x > 0$

$g'(x)$ a le même signe que $(e - 2) - (e - 1)x$

$$(e - 2) - (e - 1)x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{e - 2}{e - 1} \text{ et } -(e - 1) < 0 \text{ donc :}$$

x	0	$\frac{e-2}{e-1}$	1
$g'(x)$	+	0	-
g	0	$g\left(\frac{e-2}{e-1}\right)$	0

La fonction g est croissante sur $\left[0 ; \frac{e-2}{e-1}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{e-2}{e-1} ; 1\right]$ donc la fonction g admet un maximum en $\frac{e-2}{e-1}$,

Ce maximum est égal à $g\left(\frac{e-2}{e-1}\right)$ soit $\ln(1 + e - 2) - \frac{e-2}{e-1} = \ln(e-1) - \frac{e-2}{e-1}$ dont une valeur arrondie au centième est 0,12.

c. La fonction g est définie continue, strictement croissante sur $\left[0 ; \frac{e-2}{e-1}\right]$, $g(0) = 0$ et $g\left(\frac{e-2}{e-1}\right) \approx 0,12$ donc $g(0) \leq 0,05 \leq$

$g\left(\frac{e-2}{e-1}\right)$ donc l'équation $g(x) = 0,05$ admet sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{e-2}{e-1}\right]$ une solution α .

La fonction g est définie continue, strictement décroissante sur $\left[\frac{e-2}{e-1} ; 1\right]$, $g(1) = 0$ et $g\left(\frac{e-2}{e-1}\right) \approx 0,12$ donc $g(1) \leq 0,05 \leq$

$g\left(\frac{e-2}{e-1}\right)$ donc l'équation $g(x) = 0,05$ admet sur l'intervalle $\left[\frac{e-2}{e-1} ; 1\right]$ une solution β .

L'équation $g(x) = 0,05$ admet sur l'intervalle $[0 ; 1]$ deux solutions α et β , avec $\alpha < \frac{e-2}{e-1} < \beta$.

Partie B

1. L'algorithme calcule le nombre de modifications à effectuer avec la fonction de retouche (avec un pas de 0,01) pour lesquelles la modification de nuances est perceptible visuellement.

2. On cherche donc les valeurs de x telles que $f_2(x) - x \geq 0,05$ c'est-à-dire telles que $g(x) \geq 0,05$.

x	0	α	$\frac{e-2}{e-1}$	β	1
$g'(x)$		+	0	-	
g	0	$\xrightarrow{0,05}$		$\xrightarrow{0,05}$	
			$M \approx 0,12$		0

$$g(x) \geq 0,05 \Leftrightarrow \alpha \leq x \leq \beta$$

Ce sont donc toutes les nuances comprises entre les 2 solutions α et β de la partie précédente, les nuances sont des nombres de la forme $\frac{k}{100}$, donc les nuances sont comprises entre 0,09 et 0,85. Il y en a par conséquent $85 - 9 + 1 = 77$ nuances. L'affichage est 77

Partie C

$$a. \quad A_{f_3} = \int_0^1 x e^{x^2-1} dx = \left[\frac{1}{2} e^{x^2-1} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-1} \text{ soit } A_{f_3} \approx 0,32$$

$$b. \quad A_{f_4} = \int_0^1 \left(4x - 15 + \frac{60}{x+4} \right) dx = \left[2x^2 - 15x + 60 \ln(x+4) \right]_0^1 \quad A_{f_4} = -13 + 60 \ln 5 - 60 \ln 4 \text{ soit } A_{f_4} \approx 0,39$$

Entre deux fonctions, celle qui aura pour effet d'éclaircir le plus l'image sera celle correspondant à la plus petite aire or $A_{f_3} < A_{f_4}$ donc f_3 a pour effet d'éclaircir le plus l'image.

Exercice 4 (5 points) Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

1. \overline{AB} a pour coordonnées $(1; -2; -5)$

\overline{AC} a pour coordonnées $(2; -1; -4)$

Les coordonnées de \overline{AB} et \overline{AC} ne sont pas proportionnelles donc \overline{AB} et \overline{AC} ne sont pas colinéaires, les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. a. Si \vec{u} soit un vecteur normal au plan (ABC), \vec{u} est orthogonal à \overline{AB} et à \overline{AC} donc $1 - 2b - 5c = 0$ et $2 - b - 4c = 0$

Il faut donc résoudre le système $\begin{cases} 2b + 5c = 1 \\ b + 4c = 2 \end{cases}$ donc $2b + 5c - 2(b + 4c) = 1 - 4$ donc $-3c = -3$ soit $c = 1$

$$b + 4c = 2 \text{ donc } b + 4 = 2 \text{ soit } b = -2$$

$\vec{u}(1, -2, 1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

b. $\vec{u}(1, 1, -2)$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc une équation cartésienne du plan (ABC) est de la forme $x - 2y + z + d = 0$.

$B(2; 0; 2)$ appartient au plan donc $2 - 0 + 2 + d = 0$ soit $d = -4$

Une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x - 2y + z - 4 = 0$.

c. En remplaçant : $x_D - 2y_D + z_D - 4 = 3 + 12 + 1 - 4$ donc $x_D - 2y_D + z_D - 4 \neq 0$

Le point D n'appartient pas au plan (ABC).

3. a. Un vecteur directeur de **D** est $\vec{v}(2; -4; 2)$ or $\vec{v} = 2\vec{u}$ donc la droite **D** est orthogonale au plan (ABC).

b. H est le point d'intersection de **D** et du plan (ABC) donc les coordonnées de H vérifient $\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -4t + 5 \\ z = 2t - 1 \end{cases}$ et $x - 2y + z - 4 = 0$.

$$2t + 3 - 2(-4t + 5) + 2t - 1 - 4 = 0 \text{ donc } 12t - 12 = 0 \text{ soit } t = 1$$

H a pour coordonnées $(5; 1; 1)$

4. \overline{DE} a pour coordonnées $(1; -2; -5)$ ces coordonnées ne sont pas proportionnelles à celles de \vec{u} donc \overline{DE} et \vec{u} ne sont pas colinéaires.

$\overline{DE} \cdot \vec{u} = 1 + (-2) \times (-2) + (-5) \times 1 = 0$ donc \overline{DE} et \vec{u} sont orthogonaux.

(DE) est parallèle au plan (ABC), D n'appartient pas au plan (ABC) donc la droite (DE) est strictement parallèle au plan (ABC).

Exercice 4 (5 points)**Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité****Partie A : préliminaires**

1. a. $N \equiv 0$ modulo N donc si $n^2 \equiv N - 1$ modulo N alors $n^2 \equiv -1$ modulo N donc $(n^2)^2 \equiv (-1)^2$ modulo N donc $n^4 \equiv 1$ modulo N soit : $n \times n^3 \equiv 1$ modulo N .

b. En posant $n = 5$ et $N = 26$, $n^2 = 25$ donc $n^2 \equiv N - 1$ modulo N donc $n \times n^3 \equiv 1$ modulo N soit $5 \times 5^3 \equiv 1$ modulo 26
 $k_1 = 5^3 = 125$

$$2. a. A^2 = \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 18 & 7 \end{pmatrix}$$

$$6A - A^2 = \begin{pmatrix} 24 & 6 \\ 18 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 18 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5I.$$

$$b. 6A - A^2 = 5I \text{ donc } \frac{6}{5}A - \frac{1}{5}A^2 = I \text{ soit } A \left(\frac{6}{5}I - \frac{1}{5}A \right) = I$$

A est inversible et que sa matrice inverse, notée A^{-1} , est $A^{-1} = \frac{6}{5}I - \frac{1}{5}A$.

$$c. A^{-1} = \frac{6}{5}I - \frac{1}{5}A = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}B \text{ donc } B = 5A^{-1}.$$

d. Si $AX = Y$, alors $BAAX = BY$ soit $5A^{-1}A = BY$ donc $5X = BY$.

Partie B : procédure de codage

« ET » (mot à coder) $\rightarrow X = \begin{pmatrix} 4 \\ 19 \end{pmatrix} \rightarrow Y = AX = \begin{pmatrix} 35 \\ 50 \end{pmatrix} \rightarrow R = \begin{pmatrix} 9 \\ 24 \end{pmatrix} \rightarrow$ « JY » (mot codé).

Partie C : procédure de décodage (on conserve les mêmes notations que pour le codage)

Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y = AX$.

On donne les matrices : $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

$$1. Y = AX \Leftrightarrow 5X = BY \Leftrightarrow 5 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_1 = 2y_1 - y_2 \\ 5x_1 = -3y_1 + 4y_2 \end{cases}.$$

$$2. 21 \times 5 \equiv 1 \text{ modulo } 26 \text{ donc si } \begin{cases} 5x_1 = 2y_1 - y_2 \\ 5x_1 = -3y_1 + 4y_2 \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} x_1 \equiv 21 \times 2y_1 - 21y_2 \\ x_1 \equiv -21 \times 3y_1 + 21 \times 4y_2 \end{cases} \text{ modulo } 26$$

$$21 \times 2 = 42 = 26 + 16 \text{ donc } 21 \times 2 \equiv 16 \text{ modulo } 26$$

$$-21 = -26 + 5 \text{ donc } -21 \equiv 5 \text{ modulo } 26$$

$$-21 \equiv 5 \text{ modulo } 26 \text{ donc } -21 \times 3 \equiv 15 \text{ modulo } 26$$

$$21 \times 4 = 84 = 26 \times 3 + 6 \text{ donc } 21 \times 4 \equiv 6 \text{ modulo } 26$$

$$\text{si } \begin{cases} 5x_1 = 2y_1 - y_2 \\ 5x_1 = -3y_1 + 4y_2 \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + 5y_2 \\ x_1 \equiv 15y_1 + 6y_2 \end{cases} \text{ modulo } 26$$

$$3. \text{ « QP » (mot à décoder)} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 16 \\ 15 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + 5y_2 \\ x_1 \equiv 15y_1 + 6y_2 \end{cases} \text{ modulo } 26 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \equiv 331 \\ x_1 \equiv 330 \end{cases} \text{ modulo } 26 \rightarrow R = \begin{pmatrix} 19 \\ 18 \end{pmatrix} \rightarrow \text{« TS »}$$

(mot décodé)