Deux nombres sont dits amiables si la somme des diviseurs positifs de l'un est égale à la somme des diviseurs positifs de l'autre.
On pose : $a = 3 \times 2^{n-1} - 1$; $b = 3 \times 2^{n} - 1$; $c = 9 \times 2^{2n-1} - 1$; $A = 2^{n} \times a \times b$ et $B = 2^{n} \times c$
Thabit ibn Quraa a démontré que si a, b et c sont premiers, alors A et B sont amiables.

Démonstration de la propriété :

1. Tous les diviseurs considérés sont positifs. On suppose a ; b ; c premiers. Comme a et b sont distincts, les écritures de A et B sont les décompositions en facteurs premiers de A et B.
Les entiers 1 ; 2 ; ... ; 2^{n} ; c ; $c \times 2$; ... ; $c \times 2^{n}$ sont des diviseurs de B. Justifier qu'il n'y en a pas d'autres.
2. Etablir de même la liste des diviseurs de A.
3. Montrer que la somme S_B des diviseurs de B est égale à $(1 + c) \times (2^{n+1} - 1)$
4. Montrer que la somme S_A des diviseurs de A est égale à $(1 + a + b + ab) \times (2^{n+1} - 1)$
5. En utilisant les expressions de a, b et c en fonction de n montrer que $S_A = S_B$. Conclure.

CORRECTION

1. $c = 9 \times 2^{2n-1} - 1$ donc c est un nombre impair. Soit d un diviseur de B.
En décomposant d en produit de facteurs premiers, $d = 2^{p} c^{\gamma} d'$ avec d' premier avec 2 et c ; p nombre entier tel que $0 \le p \le n$; γ nombre entier égal soit à 0 soit à 1.

d divise B donc il existe un entier naturel q tel que $B = d\,q$ donc $2^{n} c = 2^{p} c^{\gamma} d'\,q$ donc $2^{n-p} c^{1-\gamma} = d'\,q$.
d' divise $2^{n-p} c^{1-\gamma}$, d' est premier avec 2 et c donc avec $2^{n-p} c^{1-\gamma}$ donc $d' = 1$.
Tout diviseur de B est donc de la forme 2^{p} ou $2^{p} c$ avec $0 \le p \le n$.
Les diviseurs de B sont 1 ; 2 ; ... ; 2^{n} ; c ; $c \times 2$; ... ; $c \times 2^{n}$.

2. $a = 3 \times 2^{n-1} - 1$; $b = 3 \times 2^{n} - 1$ donc a et b sont impairs.
$A = 2^{n} \times a \times b$
Soit d un diviseur de A.
En décomposant d en produit de facteurs premiers, $d = 2^{p} a^{\alpha} b^{\beta} d'$ avec d' premier avec 2, avec a et avec b.
p est nombre entier tel que $0 \le p \le n$, α et β sont deux nombres égaux soit à 0 soit à 1.

d divise A donc il existe un entier naturel q tel que $A = d\,q$ donc $2^{n} a\,b = 2^{p} a^{\alpha} b^{\beta} d'\,q$ donc $2^{n-p} a^{1-\alpha} b^{1-\beta} = d'\,q$.
d' premier avec 2, a et b donc d' premier avec $2^{n-p} a^{1-\alpha} b^{1-\beta}$ donc $d' = 1$.
Les diviseurs de A sont 1 ; 2 ; ... ; 2^{n} ; a ; $a \times 2$; ... ; $a \times 2^{n}$; b ; $b \times 2$; ... ; $b \times 2^{n}$; $a \times b$; $a \times b \times 2$; ... ; $a \times b \times 2^{n}$.

3. $S_B = 1 + 2 + \dots + 2^{n} + c\,(1 + 2 + \dots + 2^{n})$
$S_B = (1 + c) \times (1 + 2 + \dots + 2^{n})$
$1 + 2 + \dots + 2^{n} = \dfrac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$ donc $S_B = (1 + c) \times (2^{n+1} - 1)$.

4. $S_A = 1 + 2 + ... + 2^{n} + a + a \times 2 + ... + a \times 2^{n} + b + b \times 2 + ... + b \times 2^{n} + a \times b + a \times b \times 2 + ... + a \times b \times 2^{n}$.
$S_A = (1 + 2 + \dots + 2^{n}) + a\,(1 + 2 + \dots + 2^{n}) + b\,(1 + 2 + \dots + 2^{n}) + a\,b\,(1 + 2 + \dots + 2^{n})$
$S_A = (1 + a + b + a\,b)(1 + 2 + \dots + 2^{n})$ or $1 + 2 + \dots + 2^{n} = 2^{n+1} - 1$ donc $S_A = (1 + a + b + a\,b) \times (2^{n+1} - 1)$

5. $S_A = (1 + a + b + a\,b) \times (2^{n+1} - 1)$
$a = 3 \times 2^{n-1} - 1$; $b = 3 \times 2^{n} - 1$ donc $a \times b = (3 \times 2^{n-1} - 1)(3 \times 2^{n} - 1)$
En développant le produit : $a \times b = 9 \times 2^{2n-1} - 3 \times 2^{n-1} - 3 \times 2^{n} + 1$
$a \times b = 9 \times 2^{2n-1} - (a + 1) - b$ donc $1 + a + b + a \times b = 9 \times 2^{2n-1}$

$S_A = 9 \times 2^{2n-1} \times (2^{n+1} - 1)$

$S_B = (1 + c) \times (2^{n+1} - 1)$ donc $S_B = 9 \times 2^{2n-1} \times (2^{n+1} - 1)$ donc $S_A = S_B$, les nombres A et B sont amiables