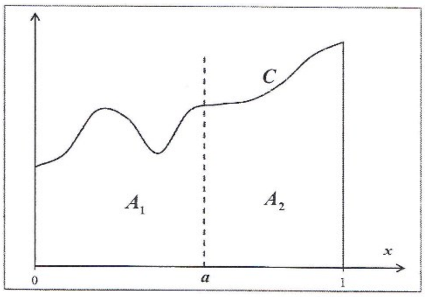
Centres étrangers juin 2016



Soit f une fonction définie sur l'intervalle [0, 1], continue et positive sur cet intervalle, et a un réel tel que $0 < a < 1$.

On note :

- C la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal ;
- A_1 l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses et la courbe C d'une part, les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$ d'autre part ;
- A_2 l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses et la courbe C d'une part, les droites d'équations $x = a$ et $x = 1$ d'autre part.

Le but de cet exercice est de déterminer, pour différentes fonctions f une valeur du réel a vérifiant la condition (E) : « les aires A_1 et A_2 sont égales ».

On admet l'existence d'un tel réel a pour chacune des fonctions considérées.

Partie A - Étude de quelques exemples

1. Vérifier que dans les cas suivants, la condition (E) est remplie pour un unique réel a, et déterminer sa valeur :

a. f est une fonction constante strictement positive ;

b. f est définie pour tout réel x de [0, 1] par $f(x) = x$.

2. *a.* À l'aide d'intégrales, exprimer (en unité d'aire) les aires A_1 et A_2.

b. On note F une primitive de la fonction f sur l'intervalle [0, 1].

Démontrer que si le réel a satisfait la condition (E), alors $F(a) = \dfrac{F(0) + F(1)}{2}$.

La réciproque est-elle vraie ?

3. Dans cette question, on envisage deux autres fonctions particulières.

a. La fonction f est définie pour tout réel x de [0, 1] par $f(x) = e^x$.

Vérifier que la condition (E) est remplie pour un unique réel a, et déterminer sa valeur.

b. La fonction f définie pour tout réel x de [0, 1] par $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$. Vérifier que la valeur $a = \dfrac{2}{5}$ convient.

Partie B - Utilisation d'une suite pour déterminer une valeur approchée de *a*

Dans cette partie, on considère la fonction f définie pour tout réel x de [0, 1] par $f(x) = 4 - 3x^2$.

1. Démontrer que si a est un réel satisfaisant la condition (E), alors a est solution de l'équation : $x = \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{3}{8}$

Dans la suite de l'exercice, on admettra que cette équation a une unique solution dans l'intervalle [0, 1]. On note a cette solution.

2. On considère la fonction g définie pour tout réel x de l'intervalle [0, 1] par $g(x) = \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{3}{8}$, et la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = g(u_n)$.

a. Calculer u_1.

b. Démontrer que la fonction g est croissante sur l'intervalle [0, 1].

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \le u_n \le u_{n+1} \le 1$.

d. Prouver que la suite (u_n) est convergente.

À l'aide des opérations sur les limites, prouver que sa limite est égale à a.

e. On admet que le réel a vérifie l'inégalité $0 < a - u_{10} < 10^{-9}$. Calculer u_{10} à 10^{-8} près.

CORRECTION

Partie A - Étude de quelques exemples

1. *a.* f est une fonction constante strictement positive donc $f(x) = k$ (k réel strictement positif)

$A_1 = \int_0^a k\,dx = [k\,x]_0^a = k\,a$ et $A_2 = \int_a^1 k\,dx = [k\,x]_a^1 = k\,(1-a)$

$A_1 = A_2 \Leftrightarrow k\,a = k\,(1-a) \Leftrightarrow a = 1 - a \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}$. La condition (E) est remplie pour un unique réel $a = \dfrac{1}{2}$.

b. $A_1 = \int_0^a x\,dx = \left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^a = \dfrac{1}{2}a^2$ et $A_2 = \int_a^1 x\,dx = \left[\dfrac{x^2}{2}\right]_a^1 = \dfrac{1}{2}(1-a^2)$

$A_1 = A_2 \Leftrightarrow a^2 = 1 - a^2 \Leftrightarrow 2\,a^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $a = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ or $a > 0$ donc $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

La condition (E) est remplie pour un unique réel $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. *a.* f étant continue positive sur [0 ; 1], $A_1 = \int_0^a f(x)\,dx$ et $A_2 = \int_a^1 f(x)\,dx$

b. $A_1 = \int_0^a f(x)\,dx = F(a) - F(0)$ et $A_2 = \int_a^1 f(x)\,dx = F(1) - F(a)$

Si le réel a satisfait la condition (E), alors $A_1 = A_2 \Leftrightarrow F(a) - F(0) = F(1) - F(a) \Leftrightarrow 2\,F(a) = F(0) + F(1) \Leftrightarrow F(a) = \dfrac{F(0) + F(1)}{2}$

Si $F(a) = \dfrac{F(0)+F(1)}{2}$, avec $a \in [0\ ;\ 1]$, $A_1 = \displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = F(a) - F(0)$ et $A_2 = \displaystyle\int_a^1 f(x)\,dx = F(1) - F(a)$

$A_1 = \displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \dfrac{F(0)+F(1)}{2} - F(0) = \dfrac{F(1)-F(0)}{2}$

$A_2 = \displaystyle\int_a^1 f(x)\,dx = F(1) - \dfrac{F(0)+F(1)}{2} = \dfrac{F(1)-F(0)}{2}$ donc $A_1 = A_2$, la réciproque est vraie.

3. *a.* Une primitive de f est F définie par $F(x) = e^x$

$A_1 = A_2 \Leftrightarrow F(a) = \dfrac{F(0)+F(1)}{2} \Leftrightarrow e^a = \dfrac{e+1}{2} \Leftrightarrow a = \ln(e+1) - \ln 2$.

$\ln(e+1) - \ln 2 \approx 0{,}6$ donc $a \in [0\ ;\ 1]$ et $A_1 = A_2$

La condition (E) est remplie pour un unique réel $a = \ln(e+1) - \ln 2$.

b. Une primitive de f est F définie par $F(x) = -\dfrac{1}{x+2}$

$\dfrac{F(0)+F(1)}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-1}{2} + \dfrac{-1}{3}\right) = \dfrac{-5}{12}$ et $F\left(\dfrac{2}{5}\right) = -\dfrac{1}{\dfrac{2}{5}+2} = \dfrac{-5}{12}$ donc $F\left(\dfrac{2}{5}\right) = \dfrac{F(0)+F(1)}{2}$ donc $A_1 = A_2$

La valeur $a = \dfrac{2}{5}$ convient.

Partie B - Utilisation d'une suite pour déterminer une valeur approchée de *a*

1. Une primitive de f est F définie par $F(x) = 4x - x^3$

$A_1 = \displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = F(a) - F(0) = 4a - a^3$ et $A_2 = \displaystyle\int_a^1 f(x)\,dx = F(1) - F(a) = 3 - 4a + a^3$

Si a est un réel satisfaisant la condition (E), $A_1 = A_2 \Leftrightarrow 4a - a^3 = 3 - 4a + a^3 \Leftrightarrow 8a = 3 + 2a^3 \Leftrightarrow a = \dfrac{a^3}{4} + \dfrac{3}{8}$

Si a est un réel satisfaisant la condition (E), alors a est solution de l'équation : $x = \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{3}{8}$

2. *a.* $u_1 = g(u_0) = g(0) = \dfrac{3}{8}$

b. $g'(x) = \dfrac{3}{4}x^2$ donc $g'(x) \geq 0$ sur l'intervalle [0, 1] donc la fonction g est croissante sur l'intervalle [0, 1].

c. **Initialisation :** $u_1 = \dfrac{3}{8}$ et $u_0 = 0$ donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$ donc la propriété est initialisée.

Hérédité : Montrons que pour tout entier naturel n, si $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ alors $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$.

x	0	u_n	u_{n+1}	1
g	0	$g(u_n)$	$g(u_{n+1})$	$\dfrac{5}{8}$

g est croissante sur [0 ; 1] donc $g(0) \leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(1)$ soit $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \dfrac{5}{8} \leq 1$

donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$. La propriété est héréditaire.

La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

d. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ donc la suite est croissante, majorée par 1 donc la suite (u_n) est convergente.

Soit L la limite de la suite (u_n), puisque $u_{n+1} = g(u_n)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n)$ donc $L = g(L)$.

a est solution de l'équation : $x = \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{3}{8}$, et a est unique donc $L = a$.

e.

n	u_n
0	0
1	0,375
2	0,388183594
3	0,389623507
4	0,389786843
5	0,389805447

n	u_n
5	0,389805447
6	0,389807567
7	0,389807809
8	0,389807837
9	0,389807840
10	0,389807840