

L'objectif de cet exercice est de déterminer que pour tout réel x de l'intervalle $I = \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$, on a : $\frac{3 \sin x}{2 + \cos x} \leq x \leq \frac{2 \sin x + \tan x}{3}$,

avec $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ puis d'utiliser cet encadrement pour donner une valeur approchée de $\frac{\pi}{6}$ et de π .

1. Soit f définie sur I par $f(x) = \frac{3 \sin x}{2 + \cos x} - x$
 - a. Démontrer que le signe de f' sur $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$ est le même que le signe de $-\cos^2 x + 2 \cos x - 1$.
 - b. En déduire le sens de variation de f sur I , puis son signe.
2. Soit g définie par $g(x) = \frac{2 \sin x + \tan x}{3} - x$
 - a. Démontrer $g'(x) = \frac{(\cos x - 1)^2 (2 \cos x + 1)}{3 \cos^2 x}$.
 - b. En déduire le sens de variation de g sur $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$, puis le signe de g sur $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$.
3. Conclure.
4. En utilisant les valeurs exactes des lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{6}$ et l'encadrement précédent, déterminer une valeur approchée de $\frac{\pi}{6}$ et puis de π .

CORRECTION

1. a. $\begin{cases} u(x) = 3 \sin x & u'(x) = 3 \cos x \\ v(x) = 2 + \cos x & v'(x) = -\sin x \end{cases}, f'(x) = \frac{3 \cos x (2 + \cos x) - 3 \sin x (-\sin x)}{(2 + \cos x)^2} - 1$

$$f'(x) = 3 \frac{\cos x (2 + \cos x) + \sin^2 x}{(2 + \cos x)^2} - 1,$$

$$f'(x) = 3 \frac{2 \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(2 + \cos x)^2} - 1 \text{ or } \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$f'(x) = \frac{3(2 \cos x + 1) - (2 + \cos x)^2}{(2 + \cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6 \cos x + 3 - (4 + 4 \cos x + \cos^2 x)}{(2 + \cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\cos^2 x + 2 \cos x - 1}{(2 + \cos x)^2}$$

Pour tout x de I , $(2 + \cos x)^2 > 0$ donc le signe de f' sur $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$ est le même que le signe de $-\cos^2 x + 2 \cos x - 1$.

b. En déduire le sens de variation de f sur I , puis son signe.
 $-\cos^2 x + 2 \cos x - 1 = -(\cos^2 x - 2 \cos x + 1) = -(\cos x - 1)^2$ donc pour tout x de I , $-\cos^2 x + 2 \cos x - 1 \leq 0$ donc $f'(x) \leq 0$
 f est décroissante sur I

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	
f	0	

$f(0) = 0$ et f est décroissante sur I donc pour tout x de I , $f(x) \leq 0$ donc pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$, $\frac{3 \sin x}{2 + \cos x} \leq x$.

2. a. $g(x) = \frac{1}{3} (2 \sin x + \tan x) - x$

$$\begin{cases} u(x) = \sin x & u'(x) = \cos x \\ v(x) = \cos x & v'(x) = -\sin x \end{cases} \text{ donc la dérivée de } \tan x \text{ est } \frac{\cos^2 x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$u(x) = 2 \sin x + \tan x \quad u'(x) = 2 \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2 \cos^3 x + 1}{\cos^2 x}$$

$$\text{donc } g'(x) = \frac{1}{3} \times \frac{2 \cos^3 x + 1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{2 \cos^3 x + 1 - 3 \cos^2 x}{3 \cos^2 x}$$

$$(\cos x - 1)^2 (2 \cos x + 1) = (\cos^2 x - 2 \cos x + 1) (2 \cos x + 1)$$

$$(\cos x - 1)^2 (2 \cos x + 1) = 2 \cos^3 x + \cos^2 x - 4 \cos^2 x - 2 \cos x + 2 \cos x + 1$$

$$(\cos x - 1)^2 (2 \cos x + 1) = 2 \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 1$$

$$\text{donc } g'(x) = \frac{(\cos x - 1)^2 (2 \cos x + 1)}{3 \cos^2 x}.$$

b. Sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $(\cos x - 1)^2 \geq 0$ donc $g'(x)$ a le même signe que $\cos x + 1$

or sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x \geq 0$ donc $\cos x + 1 > 0$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $g'(x) \geq 0$ donc g est croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. g est croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $g(0) = 0$ donc pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2 \sin x + \tan x}{3} - x \geq 0$ donc $x \leq \frac{2 \sin x + \tan x}{3}$.

Pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{3 \sin x}{2 + \cos x} \leq x$ donc pour tout réel x de l'intervalle $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a: $\frac{3 \sin x}{2 + \cos x} \leq x \leq \frac{2 \sin x + \tan x}{3}$

4. Pour tout réel x de l'intervalle $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a: $\frac{3 \sin x}{2 + \cos x} \leq x \leq \frac{2 \sin x + \tan x}{3}$

$$\frac{\pi}{6} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ donc } \frac{3 \sin \frac{\pi}{6}}{2 + \cos \frac{\pi}{6}} \leq \frac{\pi}{6} \leq \frac{2 \sin \frac{\pi}{6} + \tan \frac{\pi}{6}}{3}$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ donc } \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ donc } \frac{3 \times \frac{1}{2}}{2 + \frac{\sqrt{3}}{2}} \leq \frac{\pi}{6} \leq \frac{2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{3} \text{ soit } \frac{3}{4 + \sqrt{3}} \leq \frac{\pi}{6} \leq \frac{\sqrt{3} + 1}{3\sqrt{3}}$$

$$\text{En multipliant par 6 : } \frac{18}{4 + \sqrt{3}} \leq \pi \leq 2 \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}}$$

$(\frac{3 \sin x}{2 + \cos x} \leq x \leq \frac{2 \sin x + \tan x}{3})$ n'est démontré que pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc on ne peut pas utiliser l'encadrement de x précédent, pour trouver un encadrement de π).

$$\text{Soit approximativement : } 0,5233 \leq \frac{\pi}{6} \leq 0,5258 \text{ et } 3,1402 \leq \pi \leq 3,1548$$