

Exercice 1 (6 points) . Commun à tous les candidats.

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On supposera connus les résultats suivants :

- $\int_a^b (f(t) + g(t)) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$
- Si pour tout $t \in [a, b]$ $f(t) \geq 0$ alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.

Montrer que : si, pour tout t de $[a, b]$, $f(t) \leq g(t)$ alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$

Partie B

Soit n un entier naturel non nul.

On appelle f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f_n(x) = \ln(1 + x^n)$ et on pose $I_n = \int_0^1 \ln(1 + x^n) dx$

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- a. Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.
- b. Étudier les variations de f_1 sur $[0, +\infty[$.
- c. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 et interpréter graphiquement le résultat.

(Pour le calcul de I_1 , on pourra utiliser le résultat suivant : pour tout $x \in [0, 1]$, $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$.)

- a. Montrer que pour tout entier naturel non nul n , on a $0 \leq I_n \leq \ln 2$.
- b. Étudier les variations de la suite (I_n) .
- c. En déduire que la suite (I_n) est convergente.
3. Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = \ln(1 + x) - x$.
- a. Étudier le sens de variation de g sur $[0, +\infty[$.
- b. En déduire le signe de g sur $[0, +\infty[$.

Montrer alors que pour tout entier naturel n non nul, et pour tout x réel positif, on a $\ln(1 + x^n) \leq x^n$.

- c. En déduire la limite de la suite (I_n) .

Exercice 2 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration pourra consister à fournir un contre-exemple.

1. La droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t \\ z = 3t - 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ est parallèle au plan dont une équation cartésienne est :

$$x + 2y + z - 3 = 0.$$

2. Les plans P, P', P'' d'équations respectives : $x - 2y + 3z = 3$, $2x + 3y - 2z = 6$ et $4x - y + 4z = 12$ n'ont pas de point commun.

3. Les droites de représentations paramétriques respectives $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ et $\begin{cases} x = 7 + 2u \\ y = 2 + 2u \\ z = -6 - u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}$ sont sécantes.

4. On considère les points A, de coordonnées $(-1, 0, 2)$, B de coordonnées $(1, 4, 0)$, et C, de coordonnées $(3, -4, -2)$.

Le plan (ABC) a pour équation $x + z = 1$.

5. On considère les points A, de coordonnées $(-1, 1, 3)$, B, de coordonnées $(2, 1, 0)$, et C, de coordonnées $(4, -1, 5)$.

On peut écrire C comme barycentre des points A et B.

Exercice 2 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B peuvent, dans leur quasi-totalité, être traitées de façon indépendante.

Partie A

Dans cette partie, on se propose d'étudier des couples (a, b) d'entiers strictement positifs, tels que $a^2 = b^3$.

Soit (a, b) un tel couple et $d = \text{PGCD}(a, b)$. On note u et v les entiers tels que $a = du$ et $b = dv$.

1. Montrer que $u^2 = dv^3$.
2. En déduire que v divise u , puis que $v = 1$.
3. Soit (a, b) un couple d'entiers strictement positifs.

Démontrer que l'on a $a^2 = b^3$ si et seulement si a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.

4. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

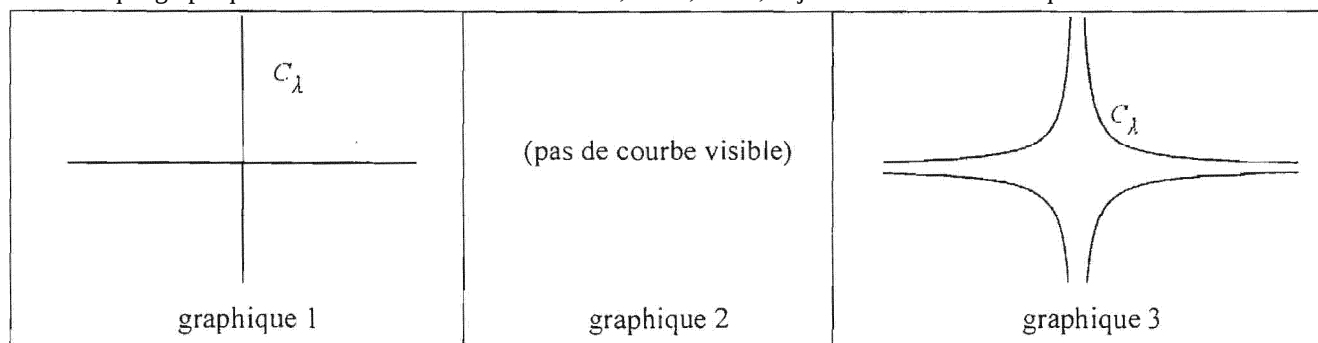
Montrer que si n est le carré d'un nombre entier naturel et le cube d'un autre entier, alors $n \equiv 0 \pmod{7}$ ou $n \equiv 1 \pmod{7}$.

Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère la surface S d'équation $x^2 \times y^2 = z^3$.

Pour tout réel λ , on note C_λ la section de S par le plan d'équation $z = \lambda$.

1. Les graphiques suivants donnent l'allure de C_λ tracée dans le plan d'équation $z = \lambda$, selon le signe de λ .
Attribuer à chaque graphique l'un des trois cas suivants : $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$, et justifier l'allure de chaque courbe.



2. a. Déterminer le nombre de points de C_{25} dont les coordonnées sont des nombres entiers strictement positifs.
b. Pour cette question, on pourra éventuellement s'aider de la question 3 de la partie A.
Déterminer le nombre de points de C_{2010} dont les coordonnées sont des nombres entiers strictement positifs.

Exercice 3 (5 points) Commun à tous les candidats

Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. A chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 euros et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 euros.

On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur.

Les trois questions de l'exercice sont indépendantes.

1. Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne.
- a. Démontrer que: $P(X = -1) = \frac{20n}{(n+10)(n+9)}$.
- b. Calculer, en fonction de n , la probabilité correspondant aux deux autres valeurs prises par la variable X .
- c. Vérifier que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X vaut : $E(X) = \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n+10)(n+9)}$
- d. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'espérance mathématique est strictement positive.

2. Le joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule de l'urne. Les tirages sont indépendants.

Déterminer la valeur minimale de l'entier n afin que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages soit strictement supérieure à 0,999.

3. On suppose que $n = 1000$. L'urne contient donc 10 boules blanches et 1000 boules rouges.

Le joueur ne sait pas que le jeu lui est complètement défavorable et décide d'effectuer plusieurs tirages sans remise jusqu'à obtenir une boule blanche.

Le nombre de boules blanches étant faible devant celui des boules rouges, on admet que l'on peut modéliser le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche par une variable aléatoire Z suivant la loi :

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, P(Z \leq k) = \int_0^k 0,01^{-0,01x} dx.$$

On répondra donc aux questions suivantes à l'aide de ce modèle.

- a. Calculer la probabilité que le joueur ait besoin de tirer au plus 50 boules pour avoir une boule blanche, soit $P(Z \leq 50)$.
- b. Calculer la probabilité conditionnelle de l'événement : « le joueur a tiré au maximum 60 boules pour tirer une boule blanche » sachant l'événement « le joueur a tiré plus de 50 boules pour tirer une boule blanche ».

Exercice 4 (4 points); Commun à tous les candidats

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + n - 2$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. a. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 4$, $u_n \geq 0$.
b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$.
c. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3. On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$.

- a. Démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

- b. En déduire que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{25}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$.

- c. Soit la somme S_n définie pour tout entier naturel n par : $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$

Déterminer l'expression de S_n en fonction de n .

CORRECTION

Exercice 1 (6 points) . Commun à tous les candidats.

Partie A : Restitution organisée de connaissances

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a ; b]$ donc $g - f$ est continue sur $[a ; b]$

Pour tout x de $[a ; b]$, $f(x) \leq g(x)$ donc $g(x) - f(x) \geq 0$ donc $\int_a^b [g(x) - f(x)] dx \geq 0$

$$\int_a^b [g(x) - f(x)] dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \text{ et } \int_a^b [g(x) - f(x)] dx \geq 0$$

$$\text{donc } \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0 \text{ soit } \int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx$$

Partie B

1. a. Pour tout x de $[0, +\infty[$ $f_1(x) = \ln(1+x)$

Soit $X = 1+x$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = +\infty$

$$f_1(x) = \ln X \text{ or } \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty$$

b. f_1 est la composée de deux fonctions continues et dérivables sur $[0, +\infty[$: $x \rightarrow 1+x$ et $x \rightarrow \ln x$ donc f_1 est continue et dérivable sur $[0, +\infty[$.

$$f'_1(x) = \frac{1}{x+1} \text{ donc pour tout } x \text{ de } [0, +\infty[\text{ } f'_1(x) > 0 \text{ donc } f_1 \text{ est strictement croissante sur } [0, +\infty[.$$

$$\begin{aligned} \text{c. Soit : } u'(x) &= 1 & u(x) &= x+1 \\ v(x) &= \ln(1+x) & v'(x) &= \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

$$u \text{ et } v \text{ sont continues et dérivables sur } [0, +\infty[\text{ donc } I_1 = \left[u(x) v(x) \right]_0^1 - \int_0^1 u(x) v'(x) dx$$

$$I_1 = \left[(x+1) \ln(x+1) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x+1}{x+1} dx \Leftrightarrow I_1 = \left[(x+1) \ln(x+1) \right]_0^1 - \int_0^1 1 dx \Leftrightarrow I_1 = \left[(x+1) \ln(x+1) \right]_0^1 - [x]_0^1$$

$$I_1 = 2 \ln 2 - 1$$

$f_1(0) = 0$ et f_1 est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ donc f_1 est positive sur $[0 ; 1]$

f_1 est continue sur $[0 ; 1]$ donc I_1 est l'aire (en unité d'aires) du domaine limité par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 0$, $x = 1$ et la courbe de f_1 .

2. a. pour tout entier naturel non nul n , f_n est la composée de deux fonctions continues sur $[0, +\infty[$: $x \rightarrow 1+x^n$ et $x \rightarrow \ln x$ donc f_n est continue sur $[0, +\infty[$.

pour tout x de $[0 ; 1]$, $0 \leq x^n \leq 1$ donc $1 \leq 1+x^n \leq 2$

la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ donc $\ln 1 \leq \ln(1+x^n) \leq \ln 2$

La fonction f_n est continue sur $[0, 1]$ et pour tout x de $[0, 1]$ $0 \leq f_n(x) \leq \ln 2$

$$\text{donc pour tout entier naturel non nul } n, 0 \leq I_n \leq \int_0^1 \ln 2 dx \text{ soit } 0 \leq I_n \leq \ln 2$$

b. Pour tout x de $[0, 1]$ $0 \leq x \leq 1$ donc $0 \leq x^{n+1} \leq x^n$ donc $1 \leq 1+x^{n+1} \leq 1+x^n$

la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ donc $\ln 1 \leq \ln(1+x^{n+1}) \leq \ln(1+x^n)$ soit $0 \leq f_{n+1} \leq f_n$

Les fonctions f_{n+1} et f_n sont continues sur $[0, 1]$ et pour tout x de $[0, 1]$: $0 \leq f_{n+1} \leq f_n$ donc $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$

La suite (I_n) est décroissante minorée par 0.

c. La suite (I_n) est décroissante minorée par 0 donc est convergente.

3. a. g est la différence de deux fonctions continues dérivables sur $[0, +\infty[$: $x \rightarrow x$ et $x \rightarrow f_1(x)$ donc g est continue et dérivable

$$\text{sur } [0, +\infty[\text{ et } g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1}$$

Pour tout $x > 0$, $g'(x) < 0$ et $g'(0) = 0$ donc g est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

b. g est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ et $g(0) = 0$ donc g est strictement négative sur $[0, +\infty[$.

Si x est un réel positif alors pour tout entier naturel n non nul, x^n est un réel positif donc $g(x^n) \leq 0$ donc pour tout entier naturel n non nul, et pour tout x réel positif, on a : $\ln(1+x^n) - x^n \leq 0$ soit $\ln(1+x^n) \leq x^n$.

c. Les fonctions f_n et $x \rightarrow x^n$ sont continues sur $[0, +\infty[$ et pour tout x de $[0, +\infty[$ on a : $0 \leq \ln(1+x^n) \leq x^n$.

$$\text{donc } 0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx \text{ donc } 0 \leq I_n \leq \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 \text{ soit } 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \text{ donc d'après le théorème des gendarmes appliqué aux suites, } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

Exercice 2 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Un vecteur directeur de la droite D de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t \\ z = 3t - 1 \end{cases}$ est $\vec{u}$ de coordonnées (1 ; -2 ; 3)

Un vecteur normal au plan P est $\vec{n}$ de coordonnées (1 ; 2 ; 1) or $\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 \times 1 + (-2) \times 2 + 3 \times 1 = 0$

donc $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, la droite D de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t \\ z = 3t - 1 \end{cases} t \in \mathbb{R}$ est parallèle au plan P dont une

équation cartésienne est : $x + 2y + z - 3 = 0$.

Il était possible aussi de chercher le(s) point(s) d'intersection de D et de P et chercher t tel que $(t + 2) + 2(-2t) + (3t - 1) = 0$ ceci est équivalent à $1 = 0$ ce qui est impossible donc D et P n'ont pas de point commun, D est strictement parallèle à P. **VRAI**

2. Pour chercher les points communs à ces trois plans il faut résoudre le système : $\begin{cases} x - 2y + 3z = 3 \\ 2x + 3y - 2z = 6 \\ 4x - y + 4z = 12 \end{cases}$

$L_1 + L_2 + L_3$ et $L_3 - L_1$ conduisent au système :

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 3 \\ 7x + 5z = 21 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x - 2y + 3z = 3 \\ 7x + 5z = 21 \end{cases}$$

L'intersection de deux plans est une droite donc **FAUX**.

3. Pour déterminer l'éventuel point d'intersection des droites citées, il faut chercher des réels t et u tels que

$$\begin{cases} x = 2 - 3t = 7 + 2u \\ z = -3 + 2t = -6 - u \\ y = 1 + t = 2 + 2u \end{cases}$$

donc résoudre le système $\begin{cases} 3t + 2u = -5 \\ 2t + u = -3 \\ t - 2u = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2t + u = -3 \\ t - 2u = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5t = -5 \\ t - 2u = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ u = -1 \end{cases}$$

dans ce cas $3t + 2u = -5$ donc les deux droites sont sécantes et leur point d'intersection est A (5 ; -5 ; 0). **VRAI**

4. On considère les points A, de coordonnées (-1, 0, 2), B de coordonnées (1, 4, 0), et C, de coordonnées (3, -4, -2). Le plan (ABC) a pour équation $x + z = 1$.

$\overline{AB}$ a pour coordonnées (2 ; 4 ; -2)

$\overline{AC}$ a pour coordonnées (4 ; -4 ; -4)

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc le plan (ABC) existe.

Les coordonnées de A, B et C vérifient $x + z = 1$ donc le plan (ABC) a pour équation $x + z = 1$.

VRAI.

5. $\overline{AB}$ a pour coordonnées (3 ; 0 ; -3)

$\overline{AC}$ a pour coordonnées (5 ; -2 ; 2)

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc C n'appartient pas à la droite (AB).

On ne peut pas écrire C comme barycentre des points A et B donc **FAUX**.

Exercice 2 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. Soit (a, b) un tel couple et $d = \text{PGCD}(a, b)$. il existe deux entiers u et v premiers entre eux tels que $a = du$ et $b = dv$.
donc en remplaçant : $(du)^2 = (dv)^3$ soit $d^2 u^2 = d^3 v^3$
 $d \neq 0$ donc $u^2 = dv^3$.

2. $u^2 = dv^3$ donc v divise u^2 , soit v divise $u \times u$
d'après le théorème de Gauss, v divise $u \times u$ et v et u sont premiers entre eux, donc v divise u
 $\text{PGCD}(u; v) = 1$ or si v divise u , $\text{PGCD}(u; v) = v$ donc $v = 1$

3. si $a^2 = b^3$, d'après la question précédente $v = 1$ donc en remplaçant dans $b = dv$ et $u^2 = dv^3$, on obtient $b = d$ et $u^2 = d$ donc
 $a = du = u^3$ et $b = u^2$ donc a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.

Réciproquement

si a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier d , alors il existe un entier k tel que $a = k^3$ et $b = k^2$
donc $a^2 = (k^3)^2 = k^6$ et $b^3 = (k^2)^3 = k^6$ donc $a^2 = b^3$
donc $a^2 = b^3$ si et seulement si a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.

4. Montrer que si n est le carré d'un nombre entier naturel et le cube d'un autre entier, alors $n \equiv 0 \pmod{7}$ ou $n \equiv 1 \pmod{7}$.
S'il existe deux entiers a et b tels que $n = a^2 = b^3$ alors d'après la question précédente il existe un entier k tel que $a = k^3$ et $b = k^2$ donc
tel que $n = k^6$

k	0	1	2	3	4	5	6
k^6	0	1	1	1	1	1	1

donc $n \equiv 0 \pmod{7}$ ou $n \equiv 1 \pmod{7}$.

Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère la surface S d'équation $x^2 \times y^2 = z^3$.

Pour tout réel λ , on note C_λ la section de S par le plan d'équation $z = \lambda$.

1. C_λ a pour équations : $x^2 \times y^2 = \lambda^3$ et $z = \lambda$

Si $\lambda < 0$ il est impossible que $x^2 \times y^2$ qui est positif ou nul, soit égal à λ donc C_λ est le graphique 2

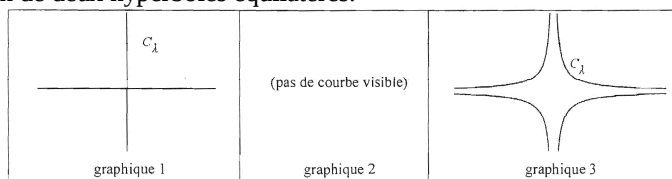
Si $\lambda = 0$ alors $x^2 \times y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$ donc C_λ est le graphique 1, C_λ est la réunion des deux axes dans le plan d'équation $z = \lambda$

Si $\lambda > 0$ par élimination ; le graphique 3 représente la courbe C_λ .

Si $\lambda > 0$, C_λ est l'ensemble des points du plan d'équation $z = \lambda$ tels que $x^2 \times y^2 = \lambda^3$

ce qui se décompose en deux parties : $xy = \sqrt{\lambda^3}$ et $xy = -\sqrt{\lambda^3}$ soit $y = \lambda \frac{\sqrt{\lambda}}{x}$ et $y = -\lambda \frac{\sqrt{\lambda}}{x}$

C_λ , quand $\lambda > 0$, est donc la réunion de deux hyperboles équilatères.



2. a. C_{25} a pour équations : soit $y = \frac{\sqrt{25^3}}{x}$ soit $y = -\frac{\sqrt{25^3}}{x}$ dans le plan d'équation $z = 25$

Soit C_{25} a pour équations : soit $y = \frac{125}{x}$ soit $y = -\frac{125}{x}$ dans le plan d'équation $z = 25$

Si les coordonnées des points de C_{25} sont des nombres entiers strictement positifs alors $y > 0$ et $\frac{125}{x}$ est un entier strictement positif

donc x est un entier strictement positif qui divise 125

soit $x = 1$ ou $x = 5$ ou 25 ou 125 .

les points cherchés ont donc pour coordonnées $A_1(1; 125; 25)$, $A_2(5; 25; 25)$, $A_3(25; 5; 25)$ et $A_4(125; 1; 25)$

b. C_{2010} a pour équations : $(xy)^2 = z^3$ avec $z = 2010$

d'après la question a. 3. a. : $a^2 = b^3$ si et seulement si a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier, avec ici $a = xy$ et $b = z$

or 2010 n'est pas le carré d'un nombre entier donc l'équation $(xy)^2 = 2010^3$ n'a pas de solutions entières.

Exercice 3 (5 points) Commun à tous les candidats

1. Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne donc on est en situation d'équiprobabilité. Le nombre initial de boules est $n + 10$, le joueur choisit une boule donc a $n + 10$ choix possibles et ne remet pas cette boule dans l'urne donc le nombre de boules possibles lors du second tirage est $n + 9$.

a. Lors d'un tirage de deux boules, soit le joueur tire deux boules blanches, et gagne 4 €

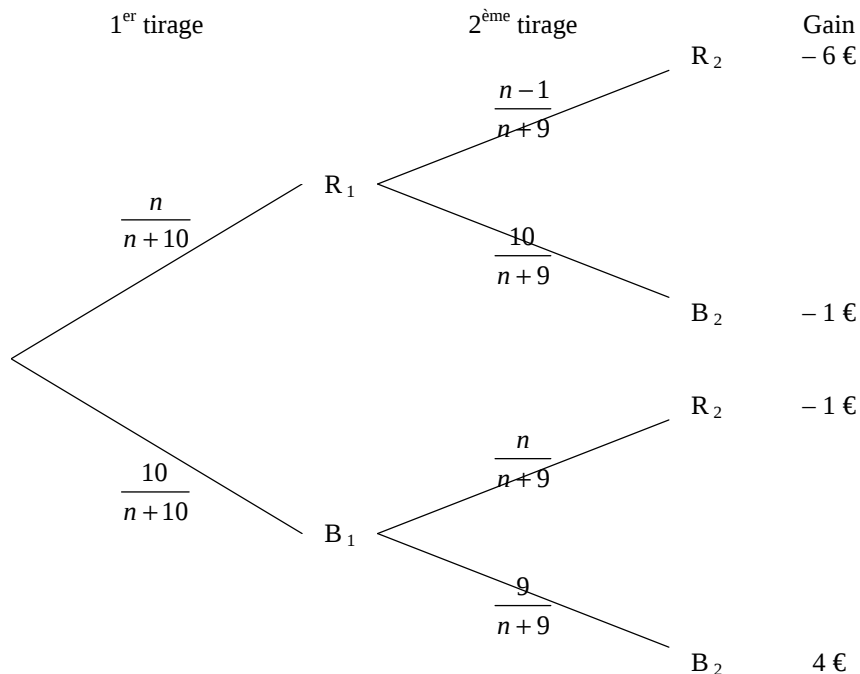
soit le joueur tire une boule blanche et une boule rouge, et gagne $2 - 3 = -1$ €

soit le joueur tire deux boules rouges, et gagne -6 €.

Si le joueur tire une boule rouge au premier tirage, l'urne contient 10 boules blanches et $n - 1$ boules rouges

Si le joueur tire une boule blanche au premier tirage, l'urne contient 9 boules blanches et n boules rouges.

d'où l'arbre de choix :



$$p(X = -1) = \frac{n}{n+10} \times \frac{10}{n+9} + \frac{10}{n+10} \times \frac{9}{n+9} \text{ donc } P(X = -1) = \frac{20n}{(n+10)(n+9)}.$$

$$b. \quad p(X = -6) = \frac{n}{n+10} \times \frac{n-1}{n+9} \text{ donc } P(X = -6) = \frac{n(n-1)}{(n+10)(n+9)}$$

$$p(X = 4) = \frac{10}{n+10} \times \frac{9}{n+9} \text{ donc } P(X = 4) = \frac{90}{(n+10)(n+9)}.$$

$$c. \quad E(X) = 4p(X = 4) + (-1)p(X = -1) + (-6)p(X = -6) \text{ donc } E(X) = \frac{360}{(n+10)(n+9)} - \frac{20n}{(n+10)(n+9)} - \frac{6n(n-1)}{(n+10)(n+9)}$$

$$E(X) = \frac{-6n^2 + 6n - 20n + 360}{(n+10)(n+9)} \Leftrightarrow E(X) = \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n+10)(n+9)}$$

$$d. \quad E(X) > 0 \Leftrightarrow -6n^2 - 14n + 360 > 0$$

$$-6x^2 - 14x + 360 = 0 \text{ or } \Delta = 14^2 + 4 \times 6 \times 360 = 94^2 \text{ donc les solutions sont } x_1 = -9, x_2 = \frac{20}{3}$$

n étant un entier supérieur ou égal à 2, l'espérance mathématique est strictement positive si $n \geq 7$

2. Les événements « obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages » et « obtenir 20 boules blanches au cours de ces 20 tirages » sont contraires donc : $p = 1 - \left(\frac{10}{n+10}\right)^{20}$

$$p > 0,999 \Leftrightarrow \left(\frac{10}{n+10}\right)^{20} < 1 - 0,999 \Leftrightarrow \left(\frac{10}{n+10}\right)^{20} < 0,001 \Leftrightarrow \frac{10}{n+10} < \sqrt[20]{0,001} \Leftrightarrow n+10 > \frac{10}{\sqrt[20]{0,001}} \Leftrightarrow n > \frac{10}{\sqrt[20]{0,001}} - 10$$

$$\Leftrightarrow n \geq 5$$

$$3. \quad P(Z \leq k) = \int_0^k 0,01^{-0,01x} dx = \left[-e^{-0,01x}\right]_0^k \text{ donc } P(Z \leq k) = 1 - e^{-0,001k}$$

$$a. \quad P(Z \leq 50) = 1 - e^{-0,001 \times 50} = 1 - e^{-0,05} \text{ donc } P(Z \leq 50) \approx 0,049$$

$$b. \quad P(Z \leq 60 / Z > 50) = \frac{P(50 < Z \leq 60)}{P(Z > 50)}$$

$$P(50 < Z \leq 60) = \int_{50}^{60} 0,01 e^{-0,01x} dx = \left[-e^{-0,01x} \right]_{50}^{60}$$

$$P(50 < Z \leq 60) = e^{-0,05} - e^{-0,06}$$

$$P(Z \leq 50) = 1 - e^{-0,05} \text{ donc } P(Z > 50) = 1 - P(Z \leq 50) = e^{-0,05}$$

$$\text{donc } P(Z \leq 60 / Z > 50) = \frac{e^{-0,05} - e^{-0,06}}{e^{-0,05}} = 1 - e^{-0,01}$$

On aurait pu dire plus simplement que Z suit une loi de durée de vie sans vieillissement donc l'événement « le joueur a tiré au maximum 60 boules pour tirer une boule blanche sachant qu'il a tiré plus de 50 boules pour tirer une boule blanche » a la même probabilité que « le joueur a tiré 10 boules pour tirer une boule blanche »

$$\text{donc } P(Z \leq 60 / Z > 50) = P(Z \leq 10) = 1 - e^{-0,01}$$

Exercice 4 (4 points); Commun à tous les candidats

1. Si $n = 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + n - 2$ devient :

$$u_1 = \frac{1}{3} u_0 + 0 - 2 \text{ soit } u_1 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}$$

Si $n = 1$, $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + n - 2$ devient :

$$u_2 = \frac{1}{3} u_1 + 1 - 2 \text{ soit } u_2 = -\frac{14}{9}$$

Si $n = 2$, $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + n - 2$ devient :

$$u_3 = \frac{1}{3} u_2 + 2 - 2 \text{ soit } u_3 = -\frac{14}{27}$$

2. a. Si $n = 3$, $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + n - 2$ devient :

$$u_4 = \frac{1}{3} u_3 + 3 - 2 \text{ soit } u_4 = \frac{67}{81} \text{ donc } u_4 \geq 0$$

La propriété est vraie pour $n = 4$

Montrons que la propriété est héréditaire c'est-à-dire que pour tout $n \geq 4$, si $u_n \geq 0$ alors $u_{n+1} \geq 0$.

$$u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + n - 2, n \geq 4 \text{ donc } n - 2 > 0 \text{ de plus } \frac{1}{3} u_n \geq 0$$

la somme de nombres positifs étant un nombre positif, donc $\frac{1}{3} u_n + n - 2 \geq 0$ soit $u_{n+1} \geq 0$.

La propriété est héréditaire donc vraie pour tout entier naturel $n \geq 4$.

b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$.

$$u_5 = \frac{1}{3} u_4 + 4 - 2 = \frac{553}{243} \text{ soit } u_5 \approx 2,28 \text{ donc } u_5 \geq 5 - 3$$

La propriété est vraie pour $n = 5$

Montrons que la propriété est héréditaire c'est-à-dire que pour tout $n \geq 5$, si $u_n \geq n - 3$ alors $u_{n+1} \geq n + 1 - 3$ ou encore $u_{n+1} \geq n - 2$

$$u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + n - 2, n \geq 5 \text{ donc } u_n \geq n - 3$$

$$\text{donc } u_{n+1} \geq \frac{1}{3} (n - 3) + n - 2 \text{ soit } u_{n+1} \geq \frac{1}{3} n + n - 1 - 2$$

$$n \geq 5 \text{ donc } \frac{1}{3} n \geq 1 \text{ donc } u_{n+1} \geq 1 + n - 1 - 2 \text{ soit } u_{n+1} \geq n - 2$$

La propriété est héréditaire donc vraie pour tout entier naturel $n \geq 5$.

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 3 = +\infty$ et pour tout entier naturel $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$ donc d'après le théorème de comparaison :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$3. a. v_{n+1} = -2 u_{n+1} + 3(n+1) - \frac{21}{2} \Leftrightarrow v_{n+1} = -2 \left(\frac{1}{3} u_n + n - 2 \right) + 3n + 3 - \frac{21}{2}$$

$$v_{n+1} = -\frac{2}{3} u_n - 2n + 4 + 3n + 3 - \frac{21}{2} = -\frac{2}{3} u_n + n - \frac{7}{2} \Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{1}{3} \times (-2 u_n) + \frac{1}{3} \times 3n - \frac{1}{3} \times \frac{21}{2}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3} \left(-2 u_n + 3n - \frac{21}{2} \right) \Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n$$

la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = -2 u_0 + 3 \times 0 - \frac{21}{2} = -\frac{25}{2}$ donc $v_n = -\frac{25}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^n$

$$b. v_n = -2 u_n + 3n - \frac{21}{2} = -\frac{25}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^n \text{ donc } -2 u_n = -\frac{25}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^n - 3n + \frac{21}{2} \text{ soit } 2 u_n = \frac{25}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^n + 3n - \frac{21}{2}$$

$$u_n = \frac{1}{2} \left(\frac{25}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^n + 3n - \frac{21}{2} \right) \text{ donc pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{25}{4} \left(\frac{1}{3} \right)^n + \frac{3}{2} n - \frac{21}{4}$$

$$c. \quad \Sigma_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = -\frac{25}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} \text{ soit } \Sigma_n = -\frac{75}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$v_0 = -2u_0 + 3 \times 0 - \frac{21}{2}$$

$$v_1 = -2u_1 + 3 \times 1 - \frac{21}{2}$$

$$v_2 = -2u_2 + 3 \times 2 - \frac{21}{2}$$

...

$$v_n = -2u_n + 3 \times n - \frac{21}{2} \text{ donc par addition terme à terme :}$$

$$v_0 + v_1 + \dots + v_n = -2(u_0 + u_1 + \dots + u_n) + 3(0 + 1 + \dots + n)$$

$$\Sigma_n = -2S_n + 3(0 + 1 + \dots + n) - \frac{21}{2}(n+1)$$

$$\Sigma_n = -2S_n + 3 \frac{n(n+1)}{2} - \frac{21}{2}(n+1)$$

$$\Sigma_n = -2S_n + \frac{3n^2 + 3n - 21n - 21}{2}$$

$$\Sigma_n = -2S_n + \frac{3n^2 - 18n - 21}{2}$$

$$\text{donc } -2S_n + 3 \frac{n^2 - 6n - 7}{2} = -\frac{75}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$2S_n = \frac{75}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + 3 \frac{n^2 - 6n - 7}{2}$$

$$S_n = \frac{75}{8} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + 3 \frac{n^2 - 6n - 7}{2}$$