

Pour tout réel k strictement positif, on désigne par f_k la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f_k(x) = k x e^{-kx}.$$

On note $\mathbf{C}_k$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

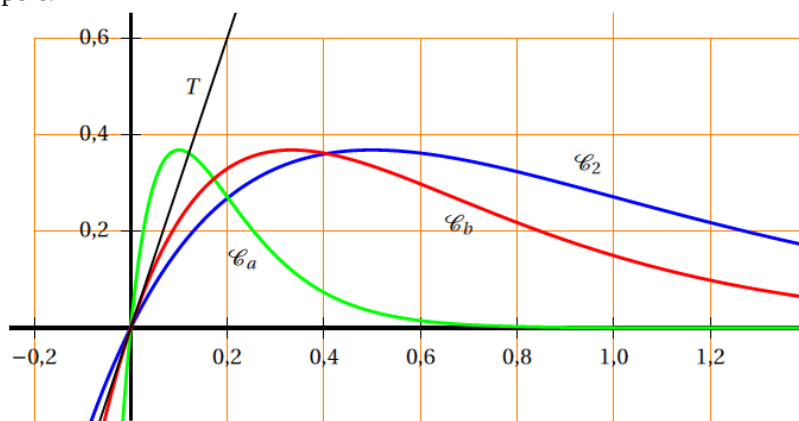
Partie A : Étude du cas $k = 1$

On considère donc la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x) = x e^{-x}$.

- Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire que la courbe $\mathbf{C}_1$ admet une asymptote que l'on précisera.
- Étudier les variations de f_1 sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.
- Démontrer que la fonction g_1 définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $g_1(x) = -(x+1)e^{-x}$ est une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.
- Étudier le signe de $f_1(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x .
- Calculer, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathbf{C}_1$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln 10$.

Partie B : Propriétés graphiques

On a représenté sur le graphique ci-dessous les courbes $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_a$ et $\mathbf{C}_b$ où a et b sont des réels strictement positifs fixés et T la tangente à $\mathbf{C}_b$ au point O origine du repère.



- Montrer que pour tout réel k strictement positif, les courbes $\mathbf{C}_k$ passent par un même point.
- Montrer que pour tout réel k strictement positif et tout réel x on a $f'_k(x) = k(1 - kx)e^{-kx}$.
 - Justifier que, pour tout réel k strictement positif, f_k admet un maximum et calculer ce maximum.
 - En observant le graphique ci-dessus, comparer a et 2. Expliquer la démarche.
 - Écrire une équation de la tangente à $\mathbf{C}_k$ au point O origine du repère.
 - En déduire à l'aide du graphique une valeur approchée de b .

CORRECTION

Partie A : Étude du cas $k = 1$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$, la courbe $\mathbf{C}_1$ admet pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = -\infty.$$

- f_1 est le produit de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f_1 est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{-x} & v'(x) = -e^{-x} \end{cases} \text{ donc } f'_1(x) = e^{-x} - x e^{-x} = (1 - x) e^{-x}.$$

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $f'_1(x)$ a le même signe que $1 - x$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'_1(x)$	+	0	-
f_1	$-\infty$	e^{-1}	0

- $$\begin{cases} u(x) = -(x+1) & u'(x) = -1 \\ v(x) = e^{-x} & v'(x) = -e^{-x} \end{cases} \text{ donc } g'_1(x) = -e^{-x} + (x+1)e^{-x} = (-1 + 1 + x)e^{-x} = x e^{-x} = f_1(x) \text{ donc } g_1 \text{ est une primitive de la fonction } f_1 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

4. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $f_1(x)$ a le même signe que x

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_1(x)$	$-$	0	$+$

5. La fonction f_1 est positive et continue sur $[0 ; 10]$ donc l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathbf{C}_1$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln 10$ a pour mesure $\int_0^{\ln 10} f_1(x) dx$.

g_1 est une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$ donc $\int_0^{\ln 10} f_1(x) dx = g_1(\ln 10) - g_1(0)$

$$\int_0^{\ln 10} f_1(x) dx = -(\ln 10 + 1) e^{-\ln 10} - [-1 e^0] = (-\ln 10 - 1) 0,1 + 1$$

$$\int_0^{\ln 10} f_1(x) dx = 0,9 - 0,1 \ln 10.$$

Partie B : Propriétés graphiques

1. $f_k(x) = kx e^{-kx}$ donc pour tout k réel, $f_k(0) = 0$.

Pour tout réel k strictement positif, les courbes $\mathbf{C}_k$ passent par O.

2. a.
$$\begin{cases} u(x) = kx & u'(x) = k \\ v(x) = e^{-kx} & v'(x) = -k e^{-kx} \end{cases} \text{ donc } f'_k(x) = k e^{-kx} - k^2 x e^{-kx} = k(1 - kx) e^{-kx}.$$

b. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc, pour tout réel k strictement positif, $f'_k(x)$ a le même signe que $1 - kx$.

$$k > 0, 1 - kx > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{k} \text{ donc pour tout réel } k \text{ strictement positif, } f'_k(x) \geq 0 \text{ sur } \left] -\infty; \frac{1}{k} \right] \text{ et } f'_k(x) \leq 0 \text{ sur } \left[\frac{1}{k}; +\infty \right[.$$

Pour tout réel k strictement positif, f_k admet un maximum sur $\mathbb{R}$ en $x = \frac{1}{k}$

Ce maximum est égal à $k \times \frac{1}{k} e^{-k \times \frac{1}{k}}$ soit e^{-1} .

c. En observant le graphique, $\mathbf{C}_a$ admet un maximum en $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{a}$ est compris entre 0 et 0,2 donc

$$a > \frac{1}{0,2} \text{ soit } a > 5 \text{ donc } a > 2.$$

d. $f'_k(0) = k(1 - k \times 0) e^{-k \times 0} = k$

Une équation de la tangente à $\mathbf{C}_k$ au point O origine du repère est donc $y = kx$.

e. Graphiquement le coefficient directeur de T est $\frac{0,6}{0,2}$ soit 3 or le coefficient directeur de la tangente à $\mathbf{C}_b$

en O est b donc une valeur approchée de b est 3.

