L'annexe qui suit sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

Partie A

1. On considère la fonction g définie sur $[1\,;+\infty[$ par $g(x) = \ln(2x) + 1 - x$

a. *Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la rédaction.*

Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[1\,;+\infty[$ une unique solution notée α.

b. Démontrer que $\ln(2\alpha) + 1 = \alpha$.

2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = \ln(2u_n) + 1$.

On désigne par (Γ) la courbe d'équation $y = \ln(2x) + 1$ dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. Cette courbe est donnée dans l'annexe.

a. En utilisant la courbe (Γ) ,construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.

c. Démontrer que la suite (u_n) converge vers α.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x) = (x-1)\,e^{1-x}$

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. Cette courbe est donnée dans l'annexe.

1. Pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, on pose : $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \int_1^x (t-1)\,e^{1-t}\,dt$

a. Démontrer que la fonction F est croissante sur $[1\,;+\infty[$.

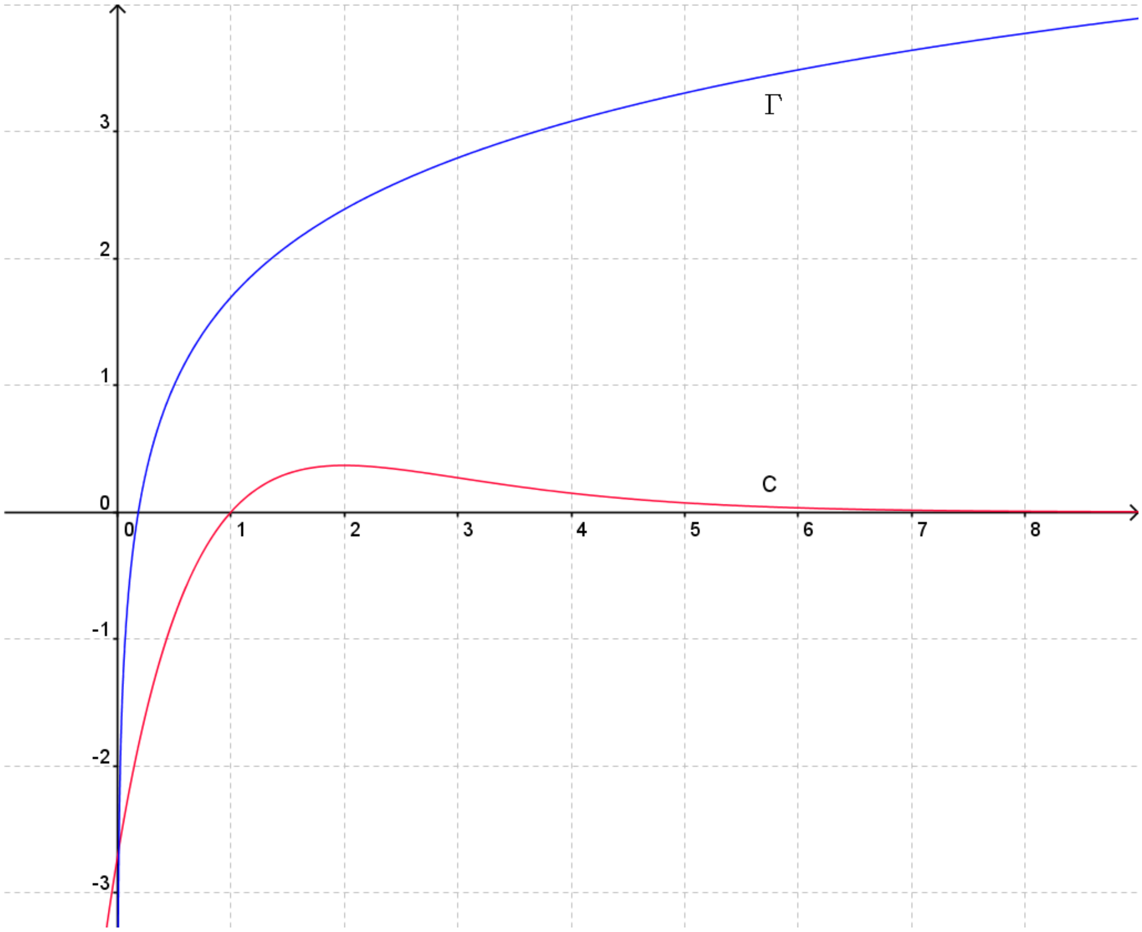
b. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout réel x appartenant à $[1\,;+\infty[$, $F(x) = -x\,e^{1-x} + 1$.

c. Démontrer que sur $[1\,;+\infty[$, l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ est équivalente à l'équation $\ln(2x) + 1 = x$.

2. Soit un réel a supérieur ou égal à 1. On considère la partie D_a du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = a$.

Déterminer a tel que l'aire, en unités d'aires, de D_a, soit égale à $\frac{1}{2}$ et hachurer D_a sur le graphique.

ANNEXE



CORRECTION

Partie A

1. *a.* g est définie continue (somme de fonctions continues) dérivable sur $[1 ; +\infty[$ et $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

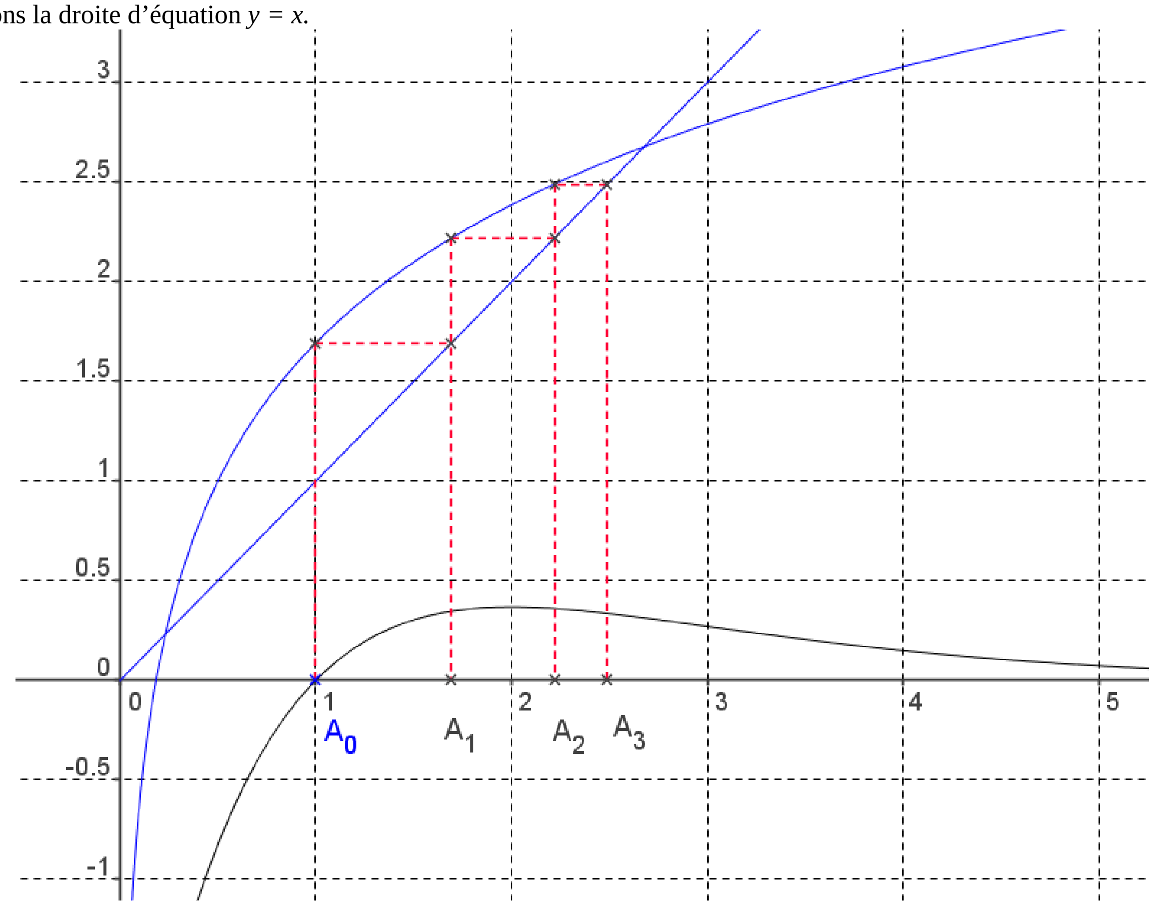
Si $x > 1$ alors $g'(x) < 0$, et $g'(1) = 0$ donc g est strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$
$g(1) = \ln 2 + 1$ donc $g(1) > 0$

$g(x) = \ln 2 + \ln x + 1 - x = \ln 2 + 1 + x\left(\frac{\ln x}{x} - 1\right)$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

g est définie continue strictement décroissante sur $[1 ; +\infty[$, $0 \in\ ]-\infty ; g(1)]$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[1 ; +\infty[$ une unique solution notée α.

b. $g(\alpha) = 0$ donc $\ln(2\alpha) + 1 - \alpha = 0$ soit $\ln(2\alpha) + 1 = \alpha$.

2. *a.* Traçons la droite d'équation $y = x$.



b. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n : $1 \le u_n \le u_{n+1} \le 3$.
Si $n = 0$, $u_1 = \ln 2 + 1$ or $0 < \ln 2 < 1$ donc $1 \le u_0 \le u_1 \le 3$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, si $1 \le u_n \le u_{n+1} \le 3$ alors $1 \le u_{n+1} \le u_{n+2} \le 3$
La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ donc la fonction h définie par $h(x) = \ln(2x) + 1$ aussi
$1 \le u_n \le u_{n+1} \le 3$ donc $h(1) \le h(u_n) \le h(u_{n+1}) \le h(3)$
soit $\ln 2 + 1 \le u_{n+1} \le u_{n+2} \le \ln 6 + 1$
$1 \le \ln 2 + 1$ et $\ln 6 + 1 \le 3$ donc $1 \le u_{n+1} \le u_{n+2} \le 3$
La propriété est héréditaire pour tout n donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

c. la suite (u_n) est croissante majorée par 3 donc converge vers un réel ℓ.
La fonction h est continue sur $[0 ; \alpha]$, $u_{n+1} = h(u_n)$ donc ℓ vérifie : $h(\ell) = \ell$
L'équation $h(x) = x$ admet une seule solution α sur $[0 ; +\infty[$ donc la suite (u_n) converge vers α.

Partie B

1. *a.* $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$. La fonction f est continue sur $[1 ; +\infty[$, donc F est la primitive nulle en 1 de f donc $F'(x) = f(x)$

Pour tout x de $]1 +\infty[$, $f(x) > 0$ et $f(1) = 0$ donc la fonction F est croissante sur $[1 ; +\infty[$.

b. $F(x) = \int_1^x (t-1)\,e^{1-t}\,dt$

Soit $u'(t) = e^{1-t}$ alors $u(t) = -e^{1-t}$

Soit $v(t) = t - 1$ alors $v'(t) = 1$ donc $F(x) = \left[-(t-1)\,e^{1-t}\right]_1^x - \int_1^x -e^{1-t}\,dt$

$F(x) = -(x-1)\,e^{1-x} - \left[e^{1-t}\right]_1^x = -(x-1)\,e^{1-x} - (e^{1-x} - 1)$ donc pour tout réel x appartenant à $[1\,;+\infty[$, $F(x) = -x\,e^{1-x} + 1$.

c. sur $[1\,;+\infty[$, l'équation $F(x) = \dfrac{1}{2}$ est équivalente à $-x\,e^{1-x} + 1 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x\,e^{1-x} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x\,e^{1-x} = 1 \Leftrightarrow \ln(2x) + \ln e^{1-x} = 0$ $\Leftrightarrow \ln(2x) + 1 - x = 0 \Leftrightarrow \ln(2x) + 1 = x$.

2. F est une primitive de f, et f est positive sur $[1\,;+\infty[$ donc $D_a = \int_1^a (t-1)\,e^{1-t}\,dt = F(a)$

Résoudre $D_a = \dfrac{1}{2}$ est équivalent à résoudre $F(a) = \dfrac{1}{2}$ soit résoudre $\ln(2x) + 1 = x$

a est donc la limite de la suite (u_n) c'est aussi le point d'intersection de la courbe de h et de la droite $y = x$