

Polynésie Juin – 99

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$). Unité graphique = 2cm.

C désigne l'ensemble des nombres complexes.

1 : Résoudre, dans C, l'équation (E) : $z^3 - 8 = 0$.

2 : On considère dans le plan (P) les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = -1 + i\sqrt{3}, z_B = 2, z_C = -1 - i\sqrt{3}.$$

a : Ecrire z_A et z_C sous forme trigonométrique.

b : Placer les points A, B et C.

c : Déterminer la nature du triangle ABC.

3 : On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = e^{\frac{2i\pi}{3}} z.$$

a : Caractériser géométriquement l'application f .

b : Déterminer les images des points A et C par f . En déduire l'image de la droite (AC) par f .

CORRECTION

1: "2" est solution évidente, on factorise $z^3 - 8$ par $(z - 2)$: $z^3 - 8 = (z - 2)(z^2 + 2z + 4)$

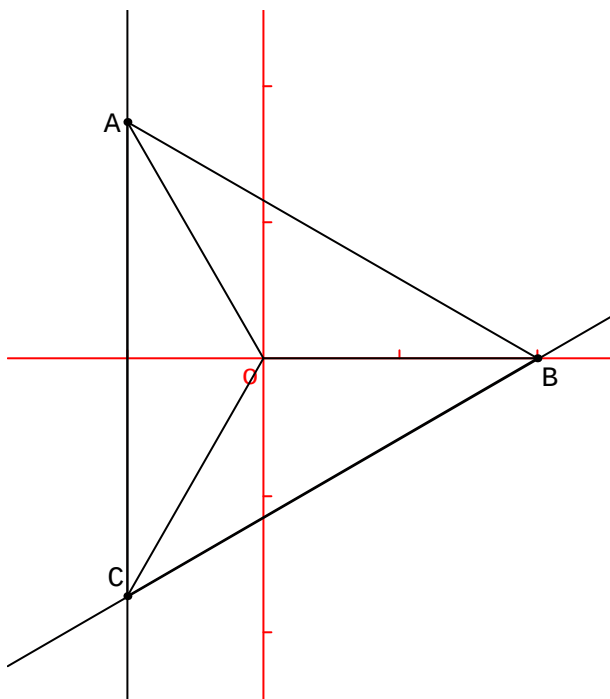
$$z^2 + 2z + 4 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4 \times 4 = -12 = (2i\sqrt{3})^2 \text{ donc les solutions de } z^2 + 2z + 4 = 0 \text{ sont } z_1 = -1 + i\sqrt{3} \text{ et } z_2 = -1 - i\sqrt{3}.$$

Les solutions de $z^3 = 8$ sont les complexes : $z_0 = 2$; $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$.

2: a: $z_A = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$ et $z_C = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$

b:



c: On remarque que : $|z_A - 2| = |z_C - 2| = |z_A - z_C| = 2\sqrt{3}$ soit $AB = BC = AC$

Donc le triangle ABC est équilatéral direct.

3: a: f est la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

b: Le triangle ABC est équilatéral de centre O donc par rotation f de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, A est transformé en C et C en B.

Par une rotation, l'image d'une droite est une droite, donc l'image de la droite (AC) est la droite (BC).