Nouvelle-Calédonie & Wallis et Futuna novembre 2017

Exercice 5 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 6$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+2} = \frac{5}{4} u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n$.

Le but de cet exercice est d'étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

Partie A :

On souhaite calculer les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) à l'aide d'un tableur.

On a reproduit ci-dessous une partie d'une feuille de calcul, où figurent les valeurs de u_0 et de u_1.

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	6
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	

1. Donner une formule qui, saisie dans la cellule B4, puis recopiée vers le bas, permet d'obtenir des valeurs de la suite (u_n) dans la colonne B.

2. Recopier et compléter le tableau ci-dessus. On donnera des valeurs approchées à 10^{-3} près de u_n pour n allant de 2 à 5.

3. Que peut-on conjecturer à propos de la convergence de la suite (u_n) ?

Partie B : Étude de la suite

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n \text{ et } w_n = u_n - 7.$$

1. *a.* Démontrer que (v_n) est une suite constante.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{4} u_n + \frac{21}{4}$.

2. *a.* En utilisant le résultat de la question 1. *b.*, montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1} < 15$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. *a.* Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

c. Calculer la limite de la suite (u_n).

CORRECTION

Partie A :

1. La formule qui, saisie dans la cellule B4, puis recopiée vers le bas, permet d'obtenir des valeurs de la suite (u_n) dans la colonne B est = 1.25 * B3 - 0.25 * B2

2.

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	6
4	2	6,75
5	3	6,938
6	4	6,984
7	5	6,996

3. On peut conjecturer que la suite (u_n) converge vers 7.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 6$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+2} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

Partie B : Étude de la suite

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \text{ et } w_n = u_n - 7.$$

1. *a.* $v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{4}u_{n+1} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{4}u_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = v_n$, (v_n) est une suite constante.

$v_0 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = \frac{21}{4}$ donc pour tout entier n, $v_n = \frac{21}{4}$

b. $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$ donc $\frac{21}{4} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$ donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}$.

2. *a.* Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1} < 15$.
Initialisation : si $n = 0$: $u_0 = 3$ et $u_1 = 6$ donc $u_0 < u_1 < 15$.
Hérédité : Montrons pour tout entier n que si $u_n < u_{n+1} < 15$, alors $u_{n+1} < u_{n+2} < 15$.
$u_{n+2} = \frac{1}{4}u_{n+1} + \frac{21}{4}$ or $u_n < u_{n+1}$ donc $\frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4} < \frac{1}{4}u_{n+1} + \frac{21}{4}$ soit $u_{n+1} < u_{n+2}$

$u_{n+1} < 15$ donc $\frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4} < \frac{15}{4} + \frac{21}{4}$ soit $u_{n+2} < 9 < 15$ donc $u_{n+1} < u_{n+2} < 15$.
La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1} < 15$.

b. Pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1} < 15$, donc la suite (u_n) est croissante majorée par 15 donc est convergente.

3. *a.* $w_n = u_n - 7$ donc $w_{n+1} = u_{n+1} - 7 = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4} - 7 = \frac{1}{4}u_n - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}(u_n - 7)$ donc $w_{n+1} = \frac{1}{4}w_n$

La suite (w_n) est une suite géométrique de premier terme $w_0 = u_0 - 7 = -4$ et de raison $\frac{1}{4}$ donc $w_n = -4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = -\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

b. $w_n = -\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ et $w_n = u_n - 7$ donc, pour tout entier naturel n, $u_n = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

c. $-1 < \frac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 7$.