

Exercice 1 (4 points) Commun à tous les candidats

Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fautive en justifiant la réponse. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Question 1

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les droites (D_1) et (D_2) de représentations paramétriques :

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -3t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ et } \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 5 - t \\ z = -2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Affirmation

Les droites (D_1) et (D_2) sont orthogonales.

Question 2

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le point A de coordonnées $(2; -1; 3)$ et la droite (D) de

représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Affirmation

Le plan (P) contenant le point A et orthogonal à la droite (D) a pour équation : $2x + y - z = 0$.

Question 3

La durée de vie, exprimée en heures, d'un jeu électronique, est une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0003$.

On rappelle que, pour tout $t \geq 0$, $p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

Affirmation

La probabilité pour que la durée de vie de ce jeu soit strictement supérieure à 2000 heures est inférieure à 0,5.

Question 4

A et B sont deux événements liés à une même épreuve aléatoire qui vérifient : $p(A) = 0,4$, $p_A(B) = 0,7$, et $p_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,1$

Affirmation

La probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé est égale à $\frac{14}{41}$.

Exercice 2 (5 points) Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 4 cm, on considère le point A d'affixe $a = -1$ et l'application f , du plan (P) dans, lui-même, qui au point M d'affixe z , distinct de A, associe le point $M' = f(M)$ d'affixe :

$$z' = \frac{iz}{z+1}.$$

1. Déterminer l'affixe des points M tels que $M' = M$.

2. Démontrer que pour tout point M distinct de A et de O, on a : $OM' = \frac{OM}{OA}$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + \frac{\pi}{2}$ à 2π près.

3 a) Soit B le point d'affixe $b = -\frac{1}{2} + i$.

Placer dans le repère le point B et la médiatrice (Δ) du segment [OA].

b) Calculer sous forme algébrique l'affixe b' du point B' image du point B par f .

Etablir que B' appartient au cercle (C) de centre O et de rayon 1.

Placer le point B' et tracer le cercle (C) dans le repère,

c) En utilisant la question 2, démontrer que, si un point M appartient à la médiatrice (Δ) , son image par f appartient au cercle (C).

d) Soit C le point tel que le triangle AOC soit équilatéral direct.

En s'aidant des résultats de la question 2, construire, à la règle et au compas, l'image du point C par f . (On laissera apparents les traits de construction.)

4. Dans cette question, on se propose de déterminer, par deux méthodes différentes, l'ensemble (Γ) des points M distincts de A et de O dont l'image M' par f appartient à l'axe des abscisses.

Les questions a) et b) peuvent être traitées de façon indépendante.

a) On pose $z = x + iy$ avec x et y réels tels que $(x, y) \neq (-1, 0)$ et $(x, y) \neq (0, 0)$. Démontrer que la partie imaginaire de z' est égale

$$\text{à : } \text{Im}(z') = \frac{x^2 + y^2 + x}{(x+1)^2 + y^2}.$$

En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (Γ) et le tracer dans le repère.

b) À l'aide de la question 2. retrouver géométriquement la nature de l'ensemble (Γ) .

Exercice 3 (6 points) Commun à tous les candidats

On considère les deux courbes (C_1) et (C_2) d'équations respectives $y = e^x$ et $y = -x^2 - 1$ dans un repère orthogonal du plan. Le but de cet exercice est de prouver qu'il existe une unique tangente (T) commune à ces deux courbes.

1. Sur le graphique représenté dans l'annexe 1, tracer approximativement une telle tangente à l'aide d'une règle. Lire graphiquement l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe (C_1) et l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe (C_2) .

2. On désigne par a et b deux réels quelconques, par A le point d'abscisse a de la courbe (C_1) et par B le point d'abscisse b de la courbe (C_2) .

- Déterminer une équation de la tangente (T_A) à la courbe (C_1) au point A.
- Déterminer une équation de la tangente (T_B) à la courbe (C_2) au point B.
- En déduire que les droites (T_A) et (T_B) sont confondues si et seulement si les réels a et b sont solutions du système (S) :

$$\begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - a e^a = b^2 - 1 \end{cases}.$$

- Montrer que le système (S) est équivalent au système (S') $\begin{cases} e^a = -2b \\ e^{2a} + 4a e^a - 4e^a - 4 = 0 \end{cases}.$

3. Le but de cette question est de prouver qu'il existe un unique réel solution de l'équation (E) $e^{2x} + 4x e^x - 4e^x - 4 = 0$. Pour cela, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} + 4x e^x - 4e^x - 4$.

- Montrer que pour tout x appartenant à $] -\infty ; 0 [$, $e^{2x} - 4 < 0$ et $4e^x(x-1) < 0$.
 - En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution dans l'intervalle $] -\infty ; 0 [$.
 - Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty [$.
 - Démontrer que l'équation (E) admet une solution unique, dans l'intervalle $[0 ; +\infty [$. On note α cette solution. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .
4. On prend pour A le point d'abscisse α . Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} du réel b pour lequel les droites (T_A) et (T_B) sont confondues,

Exercice 4 (5 points) Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty [$ par : $f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}$.

Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Étude de propriétés de la fonction f .
 - Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty [$.
 - Résoudre dans l'intervalle $[0 ; +\infty [$ l'équation $f(x) = x$. On note α la solution.
 - Montrer que si x appartient à l'intervalle $[0, \alpha]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0, \alpha]$. De même, montrer que si x appartient à l'intervalle $[\alpha ; +\infty [$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[\alpha ; +\infty [$.
- Étude de la suite (u_n) pour $u_0 = 0$

Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n + 1}$.

a) Sur le graphique, représenté dans l'annexe 2, sont représentées les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$. Placer le point A_0 de coordonnées $(u_0 ; 0)$, et en utilisant ces courbes, construire à partir de A_0 les points A_1, A_2, A_3 et A_4 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et u_4 .

Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite (u_n) ?

- Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.
 - En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
3. Étude des suites (u_n) selon, les valeurs du réel positif ou nul u_0 .

Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

Que peut-on dire du sens de variation et de la convergence de la suite (u_n) suivant les valeurs du réel positif ou nul u_0 ?

Exercice 2 (5 points) Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm, on considère les points A, B, C, M, N et P d'affixes respectives : $a = 1 + i$, $b = -1 + 2i$, $c = 2 + 3i$, $m = 7 - 5i$, $n = 5 - i$, $p = 9 + i$,

- Placer les points A, B, C, M, N et P dans le repère.
- Calculer les longueurs des côtés des triangles ABC et NMP.
- En déduire que ces deux triangles sont semblables.

Dans la suite de l'exercice, on se propose de mettre en évidence deux similitudes qui transforment le triangle ABC en le triangle NMP.

2. Une similitude directe

Soit s la similitude directe qui transforme le point A en N et le point B en P.

- Montrer qu'une écriture complexe de la similitude est : $z' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i \right) z + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}i$

- b) Déterminer le rapport, la valeur de l'angle arrondie au degré, ainsi que le centre de la similitude s .
 c) Vérifier que la similitude s transforme le point C en M .
 3. Une similitude indirecte

Soit s' la similitude dont l'écriture complexe est : $z' = 2i\bar{z} + 3 - 3i$.

- a) Vérifier que :
$$\begin{cases} s'(A) = N \\ s'(B) = M \\ s'(C) = P \end{cases}$$

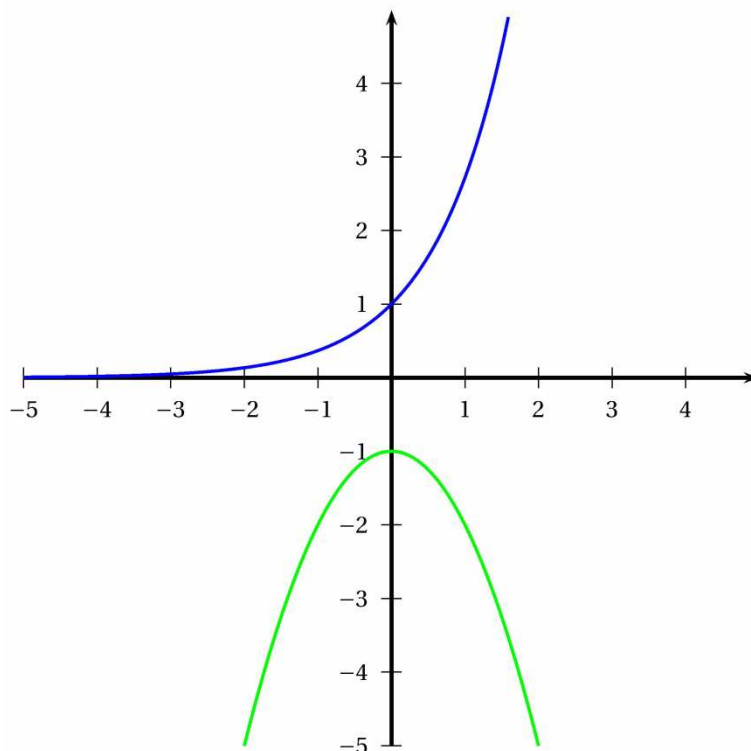
- b) Démontrer que s' admet un unique point invariant K d'affixe $k = 1 - i$.

- c) Soit h l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{1}{2}$ et J le point d'affixe 2. On pose : $f = s' \circ h$

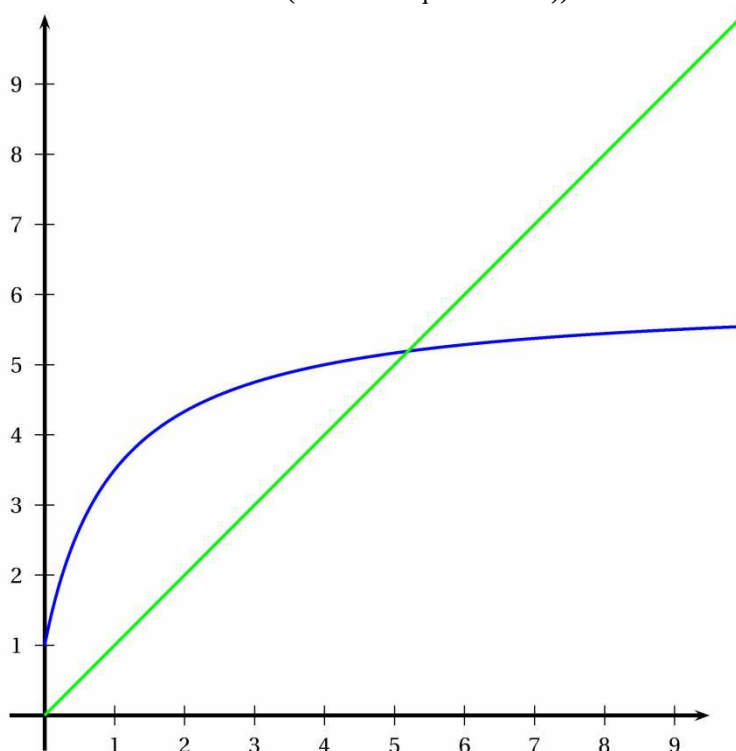
Déterminer les images des points K et J par la transformation f . En déduire la nature précise de la transformation f .

- d) Démontrer que la similitude s' est la composée d'une homothétie et d'une réflexion.

Annexe 1 (Exercice 3 question 1)



Annexe 2 (Exercice 4 question 2. a))



CORRECTION

Exercice 1 (4 points) Commun à tous les candidats

Question 1 VRAI

La droite (D_1) a pour vecteur directeur $\vec{u}_1$ de coordonnées $(2 ; -3 ; 1)$

La droite (D_2) a pour vecteur directeur $\vec{u}_2$ de coordonnées $(-2 ; -1 ; 1)$

$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 2 \times (-2) + (-3) \times (-1) + 1 \times 1 = -4 + 3 + 1 = 0$ donc $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont orthogonaux.

Les droites (D_1) et (D_2) sont orthogonales.

Question 2 VRAI

La droite (D) a pour vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $(4 ; 2 ; -2)$. Un vecteur normal au plan (P) est $\vec{n} (2 ; 1 ; -1)$

$\vec{n}$ est colinéaire à $\vec{u}$ donc (D) est orthogonale au plan (P) .

$2 \times 2 + (-1) - 3 = 0$ donc les coordonnées de A vérifient l'équation du plan (P)

Le plan (P) d'équation : $2x + y - z = 0$ contient le point A et est orthogonal à la droite (D) .

Autre méthode

(D) a pour vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $(4 ; 2 ; -2)$ ou encore $\vec{u}'$ de coordonnées $(2 ; 1 ; -1)$.

(D) est orthogonale au plan (P) donc une équation de (P) est de la forme $2x + y - z + d = 0$

$A \in (P)$ donc $2 \times 2 + (-1) - 3 + d = 0$ donc $d = 0$

Le plan (P) contenant le point A et orthogonal à la droite (D) a pour équation : $2x + y - z = 0$.

Question 3 FAUX

$$p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda t}$$

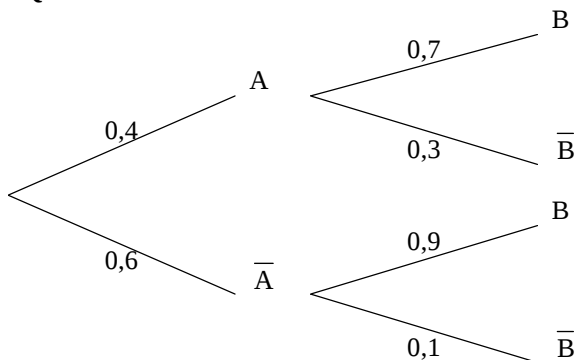
$$p(X > t) = 1 - p(X \leq t) = e^{-\lambda t}$$

La probabilité pour que la durée de vie de ce jeu soit strictement supérieure à 2000 heures est inférieure $p(X > 2000)$

$$p(X > 2000) = e^{-0,0003 \times 2000} = e^{-0,6} \text{ or } e^{-0,6} \approx 0,55$$

donc $p(X > 2000) > 0,5$

Question 4 VRAI



$$p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$$

$$\text{donc } p(A \cap B) = 0,7 \times 0,4 = 0,28$$

$$p(B) = p(\bar{A} \cap B) + p(A \cap B) = 0,28 + 0,6 \times 0,9 \text{ donc } p(B) = 0,82$$

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0,28}{0,82} = \frac{28}{82} = \frac{14}{41}$$

Exercice 2 (5 points) Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. $M' = M \Leftrightarrow M \neq A \text{ et } z = \frac{iz}{z+1} \Leftrightarrow z \neq -1 \text{ et } z(z+1) = iz \Leftrightarrow z \neq -1 \text{ et } z(z+1-i) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = -1+i$

2. si $z \neq 0$ et $z \neq -1$ $z' = \frac{iz}{z+1} \Leftrightarrow \begin{cases} |z'| = \left| \frac{iz}{z+1} \right| \\ \text{et} \\ \arg(z') = \arg\left(\frac{iz}{z+1}\right) + 2k\pi \end{cases} \quad \text{et } z \neq 0 \text{ et } z \neq -1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |z'| = \frac{|iz|}{|z+1|} \\ \text{et} \\ \arg(z') = \arg i + \arg z - \arg(z+i) + 2k\pi \end{cases} \quad \text{et } z \neq 0 \text{ et } z \neq -1 \text{ or } |i| = 1 \text{ et } \arg i = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |z'| = \frac{|z|}{|z+1|} \\ \text{et} \\ \arg(z') = \frac{\pi}{2} + \arg z - \arg(z+i) + 2k\pi \end{cases} \quad \text{et } z \neq 0 \text{ et } z \neq -1$

$\Leftrightarrow$ pour tout point M distinct de A et de O, $OM' = \frac{OM}{OA}$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + \frac{\pi}{2}$ à 2π près.

3 a)

b) $b' = \frac{i(-0,5+i)}{-0,5+i+1} = \frac{-1-0,5i}{0,5+i} = \frac{2(-1-0,5i)}{2(0,5+i)} = \frac{-2-i}{1+2i} = \frac{-(2+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{-(2-4i+i+2)}{1+4}$

$b' = \frac{-4+3i}{5}$

$|b'|^2 = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1$ donc $|b'| = 1$ soit $OB' = 1$ donc B' appartient au cercle (C) de centre O et de rayon 1.

c) Si un point M appartient à la médiatrice (Δ), alors $MO = MA$ donc $OM' = 1$ donc M' appartient au cercle (C).

d) le triangle AOC soit équilatéral direct donc $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CO}) = \frac{\pi}{3}$ à 2π près.

$(\vec{u}, \overrightarrow{OC'}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CO}) + \frac{\pi}{2}$ à 2π près.

$(\vec{u}, \overrightarrow{OC'}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$ à 2π près soit $(\vec{u}, \overrightarrow{OC'}) = \frac{5\pi}{6}$ à 2π près

$$(\vec{u}, \overrightarrow{OC'}) = \pi - \frac{\pi}{6} \text{ à } 2\pi \text{ près}$$

donc C' appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{AOC}$.

C appartient à la médiatrice (Δ) , alors C' appartient au cercle (C) d'où la construction de C' .

4. a) On pose $z = x + iy$ avec x et y réels tels que $(x, y) \neq (-1, 0)$ et $(x, y) \neq (0, 0)$.

$$z' = \frac{i(x+iy)}{x+1+iy} = \frac{(-y+ix)(x+1-iy)}{(x+1+iy)(x+1-iy)} \Leftrightarrow z' = \frac{xy - y(x+1) + i(x^2 + x + y^2)}{(x+1)^2 + y^2} \Leftrightarrow z' = \frac{-y}{(x+1)^2 + y^2} + i \frac{x^2 + x + y^2}{(x+1)^2 + y^2}$$

$$\text{donc } \text{Im}(z') = \frac{x^2 + y^2 + x}{(x+1)^2 + y^2}.$$

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow (x, y) \neq (-1, 0) \text{ et } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } \frac{x^2 + y^2 + x}{(x+1)^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow (x, y) \neq (-1, 0) \text{ et } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } x^2 + x + y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \neq (-1, 0) \text{ et } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } (x+0,5)^2 + y^2 = 0,25$$

$$\Leftrightarrow M \neq O \text{ et } M \neq A \text{ et } IM^2 = 0,25 \text{ où } I \text{ est le point de coordonnées } (-0,5; 0)$$

$$\Leftrightarrow (\Gamma) \text{ est le cercle de centre } I(-0,5; 0) \text{ de rayon } 0,5 \text{ privé de } O \text{ et } A.$$

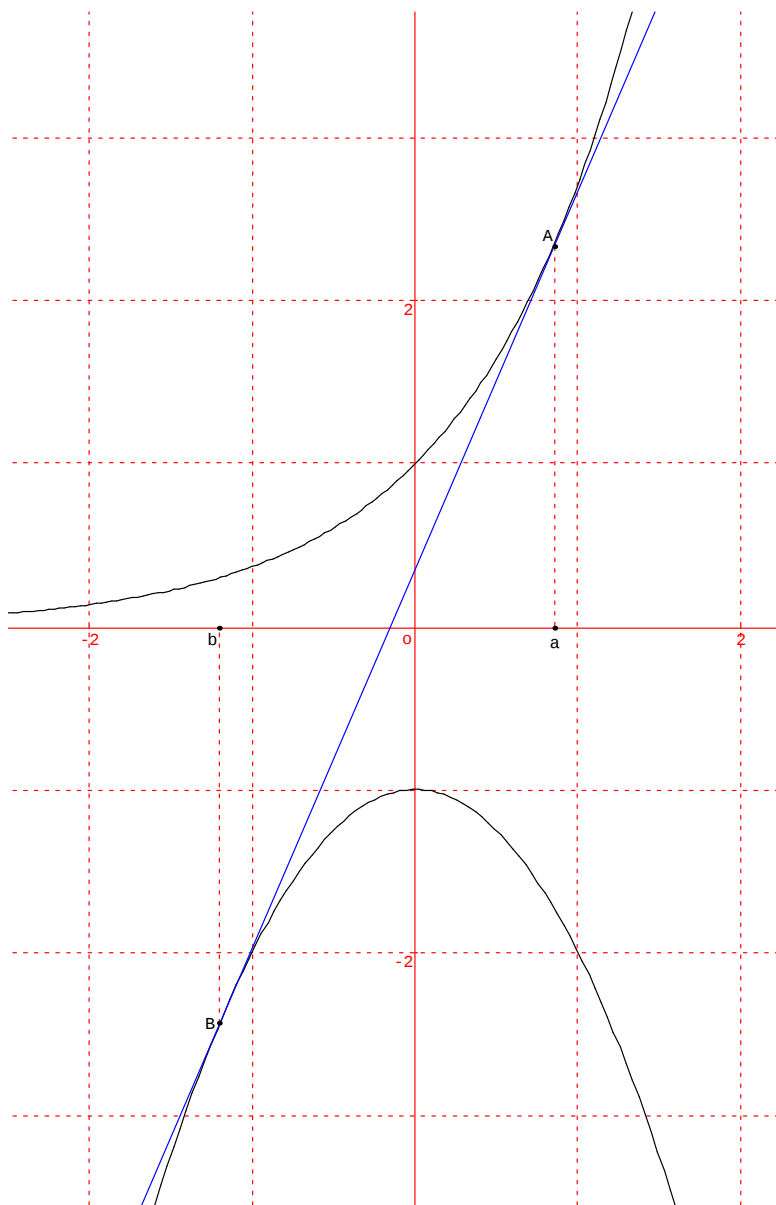
b) $M \neq O$ et $M \neq A$, M' est un point de l'axe des réels si et seulement si $\arg z' = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\arg z' = k\pi \text{ } (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = k\pi \text{ } (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow M \neq O \text{ et } M \neq A, (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + \frac{\pi}{2} = k\pi \Leftrightarrow M \neq O \text{ et } M \neq A, \text{ le triangle } MAO \text{ est}$$

$$\text{rectangle en } M \Leftrightarrow (\Gamma) \text{ est le cercle de diamètre } [OA], \text{ privé de } O \text{ et } A.$$

Exercice 3 (6 points) Commun à tous les candidats

1.



l'abscisse du point de contact de la tangente avec la courbe (C_1) est approximativement 0,9
l'abscisse du point de contact de la tangente avec la courbe (C_2) est approximativement -1,2.

2. a) La tangente à la courbe (C_1) au point A est la droite de coefficient directeur $f'(a) = e^a$ passant par A $(a; e^a)$ donc une équation de la tangente (T_A) à la courbe (C_1) au point A est $y = e^a(x - a) + e^a$

b) La tangente à la courbe (C_2) au point B est la droite de coefficient directeur $g'(b) = -2b$ passant par B $(b; -b^2 - 1)$
Une équation de la tangente (T_B) à la courbe (C_2) au point B est $y = -2bx + b^2 - 1$

c) Les droites (T_A) et (T_B) sont confondues si et seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux ($e^a = -2b$) et leurs ordonnées à l'origine sont égales ($-ae^a + e^a = b^2 - 1$) soit les réels a et b sont solutions du système (S) :
$$\begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - ae^a = b^2 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} d) \quad & \begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - ae^a = b^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = -e^a \\ 4e^a - 4ae^a = 4b^2 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^a = -2b \\ 4e^a - 4ae^a = 4(e^a)^2 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^a = -2b \\ 4e^a - 4ae^a = 4e^{2a} - 4 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} e^a = -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

3. a) pour tout x appartenant à $] -\infty; 0[$, $2x \leq 0$ donc $e^{2x} \leq e^0$ soit $e^{2x} \leq 1$ donc $e^{2x} - 4 \leq -3 < 0$

pour tout x appartenant à $] -\infty; 0[$, $4 > 0$; $e^x > 0$ et $(x - 1) < 0$ donc $4e^x(x - 1) < 0$

b) $e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4 = e^{2x} - 4 + 4e^x(x - 1)$

La somme de deux nombres strictement négatifs est un nombre strictement négatif donc pour tout x appartenant à $] -\infty; 0[$, $f(x) < 0$
L'équation (E) n'a pas de solution dans l'intervalle $] -\infty; 0[$.

c) $f'(x) = 2e^{2x} + 4(e^x + xe^x) - 4e^x$ donc $f'(x) = 2e^{2x} + 4xe^x = 2(x + 2)e^x$

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, $x \geq 0$ donc $x + 2 > 0$ et $f'(x) > 0$

la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

$$d) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} - 4 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 4e^x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(0) = -7$$

f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, (somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$) strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

$$f([0; +\infty[) = [-7; +\infty[$$

$0 \in [-7; +\infty[$ donc l'équation (E) $f(x) = 0$ admet une solution unique, dans l'intervalle $[0; +\infty[$.

$f(0,84) \approx -0,117$ et $f(0,85) \approx 0,07$ donc $f(0,84) < 0$ et $f(0,85) > 0$ donc $0,84 \leq \alpha \leq 0,85$.

$$4. \quad b = -\frac{1}{2}e^a \text{ or } 0,84 \leq a \leq 0,85 \text{ donc } e^{0,84} \leq e^a \leq e^{0,85} \text{ donc } -\frac{1}{2}e^{0,85} \leq -\frac{1}{2}e^a \leq -\frac{1}{2}e^{0,84}$$

$$\text{soit } -1,2 \leq -\frac{1}{2}e^{0,85} \leq b \leq -\frac{1}{2}e^{0,84} \leq -1,1$$

Exercice 4 (5 points) Commun à tous les candidats

1. a) $f'(x) = \frac{5}{(x+1)^2}$ donc $f'(x) > 0$ sur $[0; +\infty[$ donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

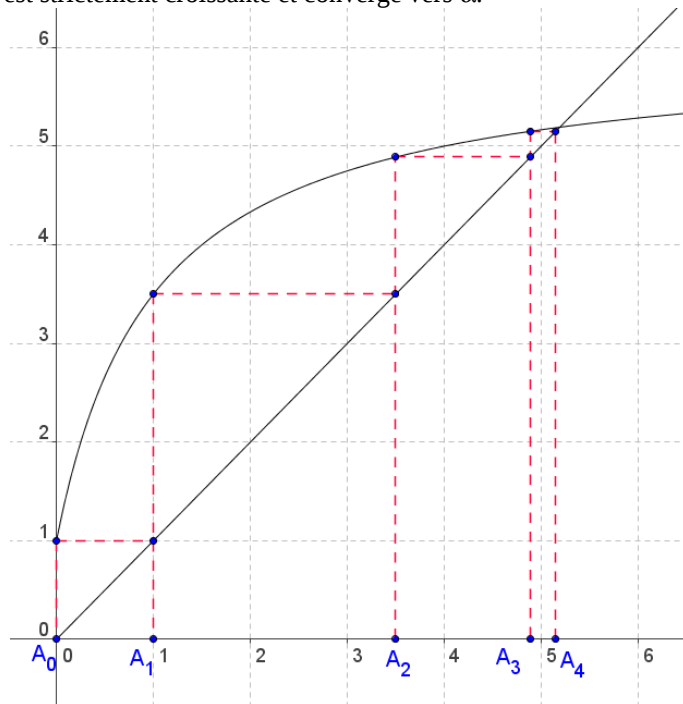
b) dans l'intervalle $[0; +\infty[$ $f(x) = x \Leftrightarrow x \geq 0$ et $6 - \frac{5}{x+1} = x \Leftrightarrow x \geq 0$ et $6(x+1) - 5 = x(x+1) \Leftrightarrow x \geq 0$ et $x^2 - 5x - 1 = 0$

$\Delta = 25 + 4 = 29$ donc $x^2 - 5x - 1 = 0$ admet deux solutions $\beta = \frac{5 - \sqrt{29}}{2}$ et $\alpha = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}$

or $\alpha > 5$ et $\beta < 0$ donc dans l'intervalle $[0; +\infty[$ $f(x) = x \Leftrightarrow x = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}$.

c) f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ donc si $0 \leq x \leq \alpha$ alors $f(0) \leq f(x) \leq f(\alpha)$ soit $1 \leq f(x) \leq \alpha$ (puisque $f(\alpha) = \alpha$)
si x appartient à l'intervalle $[0, \alpha]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0, \alpha]$.

2. a) Apparemment la suite (u_n) est strictement croissante et converge vers α .



b) $u_0 = 0$ donc $u_1 = f(0) = 1$ donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$. La propriété est vraie pour $n = 0$

Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$ si : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ alors $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$.

$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ or la fonction f est croissante sur $[0; \alpha]$ donc $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(\alpha)$

or $f(0) = 0$ et $f(\alpha) = \alpha$ donc $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$ donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$.

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

c) La suite (u_n) est croissante, majorée par α donc est convergente vers un réel ℓ .

La fonction f est continue sur $[0; \alpha]$, $u_{n+1} = f(u_n)$ donc ℓ vérifie : $f(\ell) = \ell$

L'équation $f(x) = x$ admet une seule solution α sur $[0; +\infty[$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$

3. Graphiquement : si $u_0 \in [0; \alpha]$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et converge vers α .

si $u_0 \in [\alpha; +\infty[$ la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers α .

Pour le démontrer :

$f(x) - x = 6 - \frac{5}{x+1} - x = \frac{(6-x)(x+1) - 5}{x+1} = \frac{-x^2 + 5x + 1}{x+1}$ soit $f(x) - x = \frac{-(x-\alpha)(x-\beta)}{x+1}$ d'après la question 1. b.

Pour tout x de $[0; +\infty[$, $x - \beta > 0$ et $x + 1 > 0$ donc $6 - \frac{5}{x+1} - x$ a le même signe que $-(x - \alpha)$

x	0	α	$+\infty$
$f(x) - x$	+	0	-

donc si $u_0 \in [0 ; \alpha [$, alors $f(u_0) \in [0 ; \alpha [$ donc $u_1 \leq \alpha$ et $f(u_0) - u_0 > 0$ donc $0 \leq u_0 < u_1 \leq \alpha$
La propriété est vraie pour $n = 0$

Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$ si : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ alors $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$.

$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ or la fonction f est croissante sur $[0 ; \alpha]$:

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(\alpha)$$

or $f(0) = 0$ et $f(\alpha) = \alpha$ donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$ donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$.

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

de même si $u_0 \in [\alpha ; +\infty [$, $u_1 = f(u_0)$ donc $u_1 \geq \alpha$ et $f(u_0) - u_0 < 0$ donc $u_1 < u_0$ soit $0 \leq u_0 < u_1 \leq \alpha$

Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\alpha \leq u_{n+1} \leq u_n$. La propriété est vraie pour $n = 0$

Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$ si : $\alpha \leq u_{n+1} \leq u_n$ alors $\alpha \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$

$\alpha \leq u_{n+1} \leq u_n$ or la fonction f est croissante sur $[0 ; \alpha]$ donc $f(\alpha) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$

or $f(\alpha) = \alpha$ donc $\alpha \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

La suite est soit décroissant et minorée par α soit croissante et majorée par α donc dans tous les cas, est convergente vers un réel ℓ .

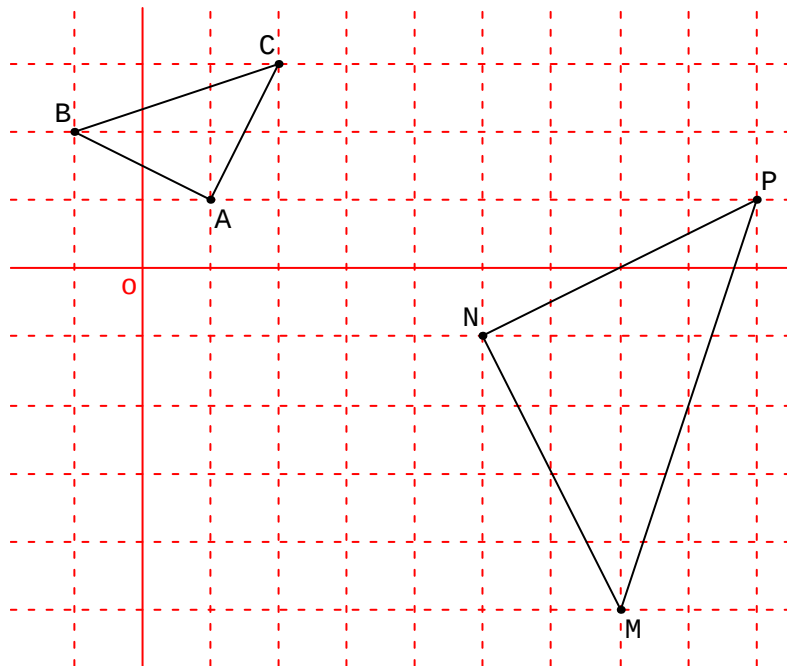
La suite (u_n) est convergente vers un réel ℓ .

La fonction f est continue sur $[0 ; \alpha]$, $u_{n+1} = f(u_n)$ donc ℓ vérifie : $f(\ell) = \ell$

L'équation $f(x) = x$ admet une seule solution α sur $[0 ; +\infty [$ donc dans tous les cas, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$

Exercice 2 (5 points) Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

1. a)



$$b) \quad AB^2 = |b - a|^2 = |-2 + i|^2 = 5 \text{ donc } AB = \sqrt{5}$$

$$AC^2 = |c - a|^2 = |1 + 2i|^2 = 5 \text{ donc } AC = \sqrt{5}$$

$$BC^2 = |c - b|^2 = |3 + i|^2 = 10 \text{ donc } BC = \sqrt{10}$$

$$MN^2 = |n - m|^2 = |-2 + 4i|^2 = 20 \text{ donc } MN = 2\sqrt{5}$$

$$MP^2 = |p - m|^2 = |-2 + 6i|^2 = 40 \text{ donc } MP = 2\sqrt{10}$$

$$NP^2 = |p - n|^2 = |4 + 2i|^2 = 20 \text{ donc } NP = 2\sqrt{5}$$

$$c) \quad \frac{MN}{AB} = \frac{NP}{AC} = \frac{BC}{MP} = 2 \text{ donc les triangles ABC et NMP sont semblables.}$$

2. a) s est une similitude directe donc a une écriture complexe de la forme $z' = \alpha z + \beta$ avec α et β complexes $a \neq 0$.

$$s(A) = N \text{ et } s(B) = P \text{ donc } \begin{cases} n = \alpha a + \beta \\ p = \alpha b + \beta \end{cases} \text{ donc } \alpha = \frac{p - n}{b - a} = \frac{4 + 2i}{-2 + i} = 2 \quad \frac{2(2 + i)(-2 - i)}{(-2 + i)(-2 - i)} = \frac{-2(4 + 4i - 1)}{(-2)^2 + 1^2}$$

$$\alpha = \frac{-2(3 + 4i)}{5} = -\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i$$

$$\beta = n - \alpha a = 5 - i - \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right)(1 + i)$$

$$\beta = \frac{25 - 5i - (-6 - 6i - 8i + 8)}{5}$$

$$\beta = \frac{25 - 5i - (2 - 14i)}{5} \text{ soit } \beta = \frac{23}{5} + \frac{9}{5}i$$

$$\text{Une écriture complexe de la similitude est : } z' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right)z + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}i.$$

$$b) \quad \text{le rapport de la similitude } s \text{ est } \left|-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right| = 2,$$

$$\text{la valeur de l'angle arrondie au degré est } \arg\left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right) \text{ soit } -127^\circ \text{ ou } 233^\circ$$

le centre Ω de la similitude s a une affixe ω telle que $\omega = \alpha \omega + \beta$ soit

$$\omega = \frac{\beta}{1 - \alpha} = \frac{23 + 9i}{5 - (-6 - 8i)} = \frac{23 + 9i}{11 + 8i} = \frac{(23 + i)(11 - 8i)}{121 + 64}$$

$$\omega = \frac{253 - 184i + 99i + 72}{185} = \frac{325 - 85i}{185} = \frac{65 - 17i}{37}.$$

c) L'image de C par la similitude a pour affixe z' telle que : $z' = \alpha c + \beta = -\frac{2}{5}(3+4i)(2+3i) + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}i$

$$z' = -\frac{2}{5}(6+9i+8i-12) + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}i$$

$$z' = -\frac{2}{5}(-6+17i) + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}i = \frac{12-34i+23+9i}{5}$$

$$z' = 7-5i = m$$

la similitude s transforme le point C en M.

3. a) s' a pour écriture complexe : $z' = 2i\bar{z} + 3-3i$.

donc l'image de A par s' a pour affixe $z' = 2i(1-i) + 3-3i$

$$z' = 2i+2+3-3i = 5-i = n$$

l'image de B par s' a pour affixe $z' = 2i(-1-2i) + 3-3i$

$$z' = -2i+4+3-3i = 7-5i = m$$

l'image de C par s' a pour affixe $z' = 2i(2-3i) + 3-3i$ soit $z' = 4i+6+3-3i = 9+i = p$ donc
$$\begin{cases} s'(A) = N \\ s'(B) = M \\ s'(C) = P \end{cases}$$

b) Soit $z = x+iy$ avec x et y réels,

$$z' = 2i(x-iy) + 3-3i = (2y+3) + i(2x-3)$$

donc le point M de coordonnées $(x; y)$ est transformé en le point M' de coordonnées $(x'; y')$ avec
$$\begin{cases} x' = 2y+3 \\ y' = 2x-3 \end{cases}$$

M est un point invariant par s' si et seulement si $M' = M$ soit si et seulement si
$$\begin{cases} x = 2y+3 \\ y = 2x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=3 \\ 2x-y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+2y=-3 \\ 4x-2y=6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-2y=3 \\ 3x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

s' admet un unique point invariant K d'affixe $k=1-i$.

c) K est le centre de l'homothétie h donc $h(K) = K$

$s'(K) = K$ donc $K \xrightarrow{h} K' \xrightarrow{s'} K$ soit $f(K) = K$

Soit J' l'image de J par l'homothétie h , $\overline{KJ'} = \frac{1}{2}\overline{KJ}$ donc $z_{J'} = \frac{1}{2}z_J + \frac{1}{2}k$ soit $z_{J'} = 1 + \frac{1-i}{2} = \frac{3-i}{2}$

$s(J')$ a pour affixe $z' = \alpha z_J + \beta = -\frac{1}{5}(3+4i)(3-i) + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}i = -\frac{1}{5}(9-3i+12i+4) + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}i$.

$$z' = -\frac{1}{5}(13+9i) + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}i = \frac{1}{5}(-13-9i+23+9i) = 2 \text{ donc } s'(J') = J$$

$$J \xrightarrow{h} J' \xrightarrow{s'} J \text{ donc } f(J) = J$$

f est la composée d'une homothétie par une similitude indirecte donc est une similitude indirecte,

s' est une similitude de rapport $|2i|=2$ et h une similitude de rapport $\frac{1}{2}$ donc f est une similitude de rapport $2 \times \frac{1}{2} = 1$

f est une similitude indirecte de rapport 1, n'est pas l'identité et admet deux points invariants J et K donc est une réflexion d'axe (JK).

d) $f = s' \circ h$ donc $s' = f \circ h^{-1}$ or h^{-1} est l'homothétie de centre K de rapport inverse de celui de h donc de rapport 2.