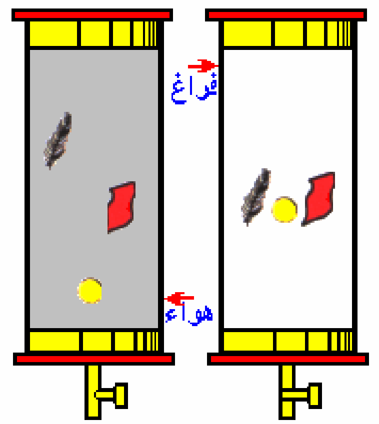
بعض تطبيقات قوانين نيوتن

I) السقوط الحر:

يختلف السقوط الرأسي للأجسام في الفراغ عنه في الهواء أو في المائع ، أين يتجلى الاختلاف ؟ وكيف تتغير سرعة مركز قصور جسم صلب يسقط رأسيا في مائع ؟(شعبة العلوم الفيزيائية والعلوم الرياضية)



1) السقوط الحر

السقوط الحر لجسم صلب هو حركة مركز قصوره G في مرجع أرضي عندما يخضع هذا الجسم لقوة الثقالة فقط .

تكون حركة السقوط الحر رأسية إذا كان مسار G مستقيما وتتحقق عند انطلاق الجسم بدون سرعة بدئية أو عند إرساله بسرعة بدئية رأسية

2) تجربة نيوتن : تبرز التجربة أن الأجسام المادية تسقط في الفراغ وفي نفس المكان وفق نفس الحركة .

3) متجهة التسارع لمركز قصور جسم صلب في سقوط حر بدون سرعة بدئية :

نعتبر حركة سقوط جسم صلب بدون سرعة بدئية من ارتفاع h:

المعلم الغاليلي: المرجع الأرضي

المجموعة المدروسة : الكرية

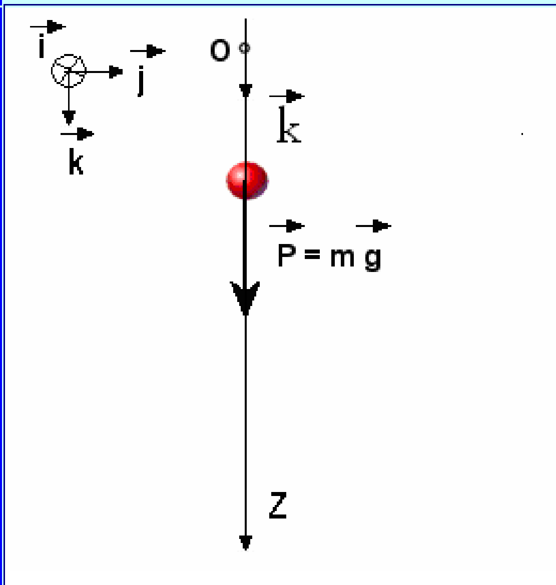
جرد القوى:

باعتبار السقوط الحر القوة الوحيدة هي:

$$\vec{P} = m\,\vec{g} = \rho\, V\, \vec{g}$$

القانون الثاني لنيوتن (مبرهنة مركز القصور)

$$\sum \vec{F}_i = m\vec{a}$$



$$\vec{P} = m\vec{a}$$

4) القوتان المهملتان:

1-4) قوة الاحتكاك المائع: القوة المقرونة بهذا التأثير: $\vec{f} = -KV^{n}.\vec{k}$ (n≥1)

قوتان تتحكمان في حركة الرياضي : الوزن "ثابت " ومقاومة الهواء التي تزداد شدتها مع ازدياد السرعة والتي لها منحى معاكس للوزن و ننتظر لحظة يكون للقوتين نفس الشدة ، يصبح مجموع متجهات القوى المطبقة على الرياضي (تسارع منعدم) ويأخذ الرياضي سرعة ثابتة تقارب $200km.h^{-1}$ خلال مدة تقارب **8 s** .

رياضة السقوط الحر

بداية السقوط ارتفاع 3 600 m

نهاية" السقوط " بدون مظلة 1 500 m.

المدة 45 s.

241) دافعة أرخميدس (الهواء)

$\vec{A}$ $A = m_a\, g = \rho_a\, V g,$ مهملة $\rho_a << \rho$

ملحوظة : الكتلة الحجمية للهواء على سطح الأرض تقارب $1,3\ kg/m^3$ بينما تفوق الكتلة الحجمية للأجسام المدروسة $1000\ kg/m^3$

341) المعادلة التفاضلية :

$$m\vec{a} = m\vec{g} \Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{g}$$

لايتعلق التسارع بالكتلة

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g = C^{ste}$$

ومنه نستنتج :

بإنجاز عملية التكامل الأول

$$v(t) = gt + v_{0z}$$

لأن الكرية تنطلق بدون سرعة بدئية

$$v_{0z} = 0$$

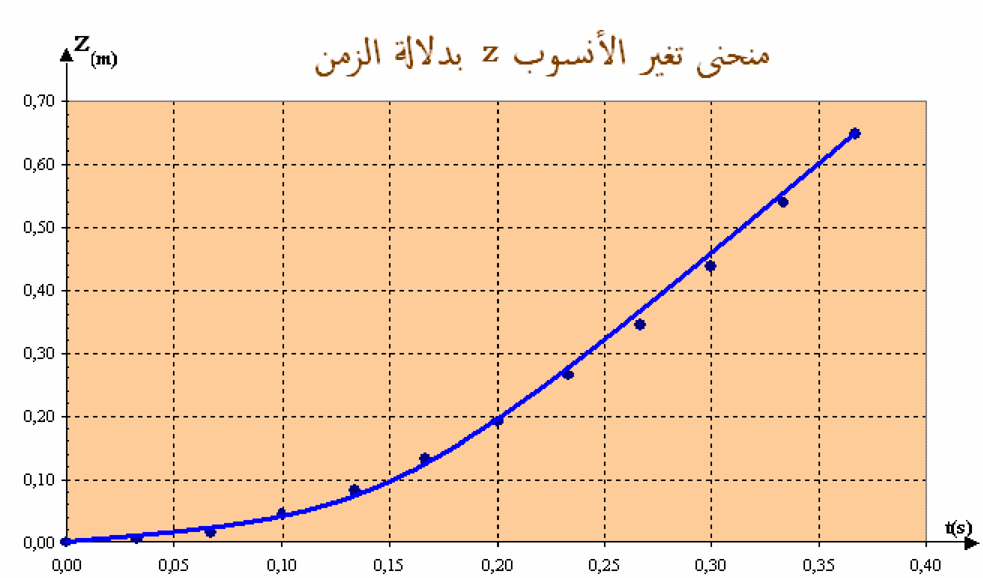
بإنجاز عملية التكامل الثاني :

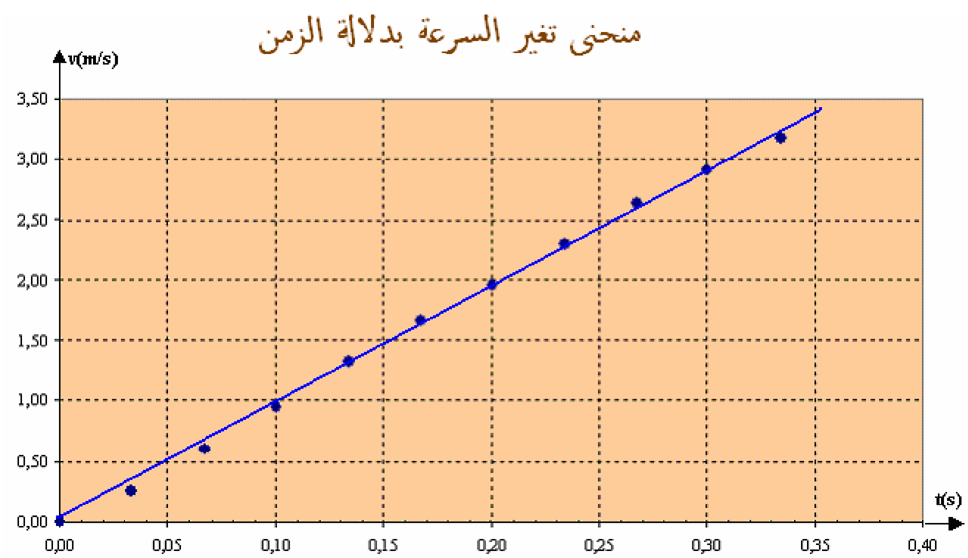
المعادلة الزمنية لحركة مركز قصور الكرية $z(t) = \frac{1}{2} g t^2$

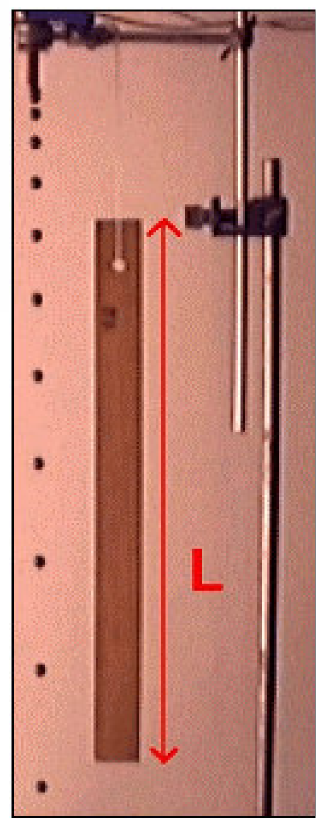
51) توظيف المعلوميات :

يمكن برنم AVEMECA من دراسة حركة الكرية وذلك بفتح الشريط والحاق به محور رأسيا موجها نحو الأسفل ثم نقوم بتدريجه ونحدد مواضع الكرية (التنقيط: pointage) فينجز البرنم جدولا يضم التواريخ والإحداثيتين (x ;z) لمركز قصور الكرية في لحظات مختلفة .

نرسل الجدول إلى برنم مُجذْوِل (REGRESSI) والذي يمكن من خط المنحنيين التاليين

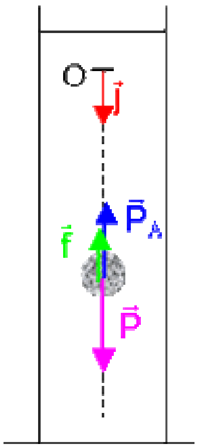






II) السقوط الرأسي باحتكاك : حركة كرية في الزيت (علوم فيزيائية وعلوم رياضية)

12) المعادلة التفاضلية للحركة : نرمز للكتلة الحجمية للزيت ب ρ_h والكتلة الحجمية للكرية ب ρ



جرد القوى :

$$\vec{P} = m\vec{g} = \rho V.\vec{g}$$

$$\vec{F}_A = \rho_h V.\vec{g}$$

$$\vec{f} = -KV^n\vec{k}$$

تطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \overrightarrow{F}_{ext} = m.\overrightarrow{a}$$

$$\rho V\vec{g} - \rho_h V\vec{g} - KV^n\vec{k} = m\vec{a}_G$$

الإسقاط على المحور $(O;\vec{j})$:

$$(\rho - \rho_h)V.g - Kv^n = \rho V\frac{dv}{dt}$$

$$\left(1 - \frac{\rho_h}{\rho}\right)g - \frac{K}{\rho V}v^n = \frac{dv}{dt}$$

$$B = \frac{K}{\rho V}$$

$$\left(1 - \frac{\rho_h}{\rho}\right)g = A$$

ومنه نستنتج المعادلة التفاضلية لحركة G أثناء السقوط الرأسي في السائل :

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + Bv^n = A}$$

12) دراسة النظام الدائم : السرعة الحدية

من المعادلة التفاضلية عندما تصبح السرعة ثابتة أي $\frac{dv}{dt} = 0$ ومنه $v_L = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{n}}$ (غالبا ما نأخذ n=1)

22) النظام البدئي : التسارع البدئي

- قبل الانطلاق تكون الكرية متوقفة وبالتالي تخضع الكرية إلى قوى مجموعها منعدم
- عند اللحظة $t_0 = 0$ تنطلق الكرية ،فيصبح مجموع متجهات القوى المطبقة غير منعدم

فتبدأ الكرية في حركة السقوط وتزداد سرعتها خلال الزمن ويسمى هذا المرحلي:النظام البدئي نسمي تسارع مركز قصور الكرية خلال هذه المرحلة بالتسارع البدئي a_0

لنحدد تعبير هذا التسارع انطلاقا من المعادلة التفاضلية :

$$a_0 = \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0}$$ عند هذه اللحظة تكون $\vec{f} = \vec{0}$ ومنه K = 0 أي B = 0

إذا : $$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0} = A = \left(\frac{\rho - \rho_h}{\rho}\right)g = \left(\frac{m - m_h}{m}\right)g$$

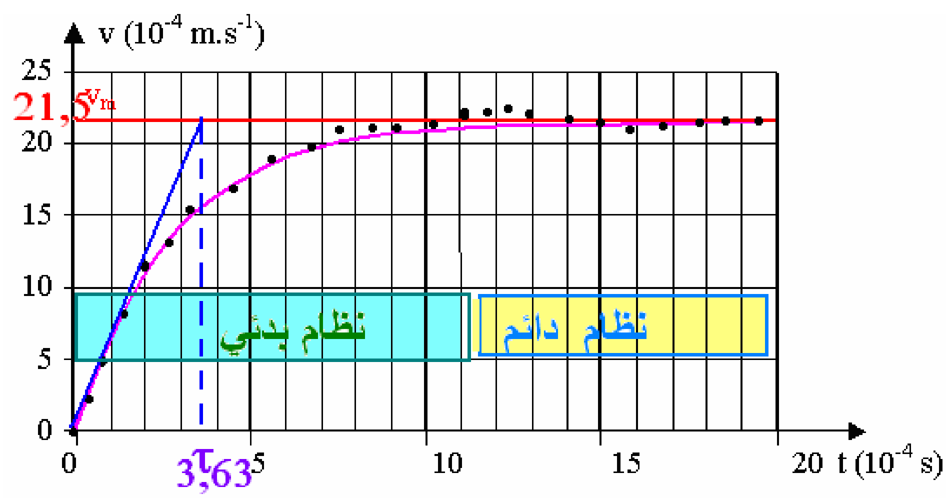
32)الزمن المميز للحركة : τ

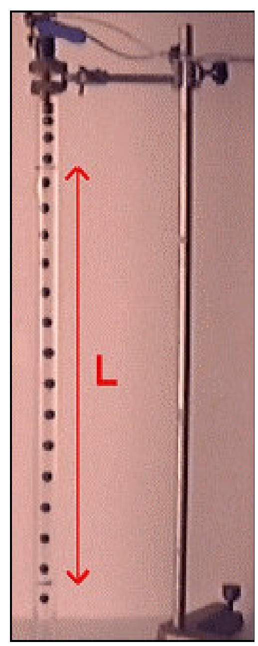
يتقاطع المماس للمنحنى v =f(t) مع الخط المقارب للمنحنى في نقطة أفصولها τ نسميه الزمن المميز للحركة

حيث $\tau a_0 = v_L$

42) التحقق التجريبي

باتباع نفس الطريقة السابقة لمعالجة الشريط المصور نصل إلى خط المنحنى الممثل لتغير سرعة مركز قصور الكرية بدلالة الزمن





تتغير سرعة مركز قصور الكرية وفق نظامين :

1. نظام بدئي : تزداد سرعة مركز القصور لتتناهى إلى قيمة حدية V_L
2. نظام دائم : تستقر سرعة مركز القصور في القيمة الحدية تكون الحركة مستقيمية منتظمة .

III) حل المعادلة التفاضلية للحركة بتطبيق طريقة أولير Euler

13) مبدأ طريقة أولير:

تمكن هذه الطريقة من حل تقريبي للمعادلة التفاضلية للحركة وذلك بتعويض الدالة $v(t)$ بدالة تقاربها محليا:

- نعوض $\frac{dv}{dt} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$، حيث $\Delta v = v_{i+1} - v_i$
- $\Delta t = t_{i+1} - t_i$: تسمى خطوة الحساب
- باعتبار خطوة الحساب صغيرة جدا يكون التسارع a_i ثابتا في هذا المجال الزمني وبالتالي تكون دالة السرعة عبارة عن مستقيم معامله الموجه هو a_i في نفس المجال.
- إذا: $v_{i+1} - v_i = a_i \,.\, \Delta t$
- ومنه: $a_i \,.\, \Delta t + v_{i+1} = v_i$

تطبيق: في هذا التطبيق نأخذ $n = 1$:

نعطي:

شعاع الكرية: $r = 1{,}50$ mm

$\rho_h = 950$ kg.m^{-3} $k = 9{,}33.10^{-2}$ S.I $\rho = 2400$ kg.m^{-3} $g = 9{,}80$ N.kg^{-1}

1) طبق طريقة أولير بالنسبة لخطوة : $\Delta t = 1{,}5.10^{-4}$ s من 0 إلى : 21.10^{-4} s.

2) مثل المنحنى الممثل لتغير سرعة مركز قصور الكرية بدلالة الزمن واعط تعليلا له.

3) بين أن حل المعادلة التفاضلية يكتب على شكل: $v = a.\exp(-t/\tau) + b$.

4) اعط التعبير الحرفي لـ a و b ثم استنتج قيمتهما العددية

الحل:

1

$$\frac{dv}{dt} + Bv = A$$
$$a = A - Bv$$

1 (نحسب A و B

$A = (1 - \rho_h/\rho)\,.g = 9{,}80 \times (1 - 950 / 2400) = 5{,}92$ m.s^{-2}

$V = 4/3\ \pi\ .\ r^3 = 4/3 \times 3{,}14 \times (1{,}50.10^{-3})^3 = 1{,}41.10^{-8}$ m^3

$B = K/\rho.V = 9{,}33.10^{-2}/2400 \times 1{,}41.10^{-8} = 2{,}75.10^3$ s^{-1}

نعوض القيم السابقة في المعادلة:

$$a = 5{,}92 - 2755\ v$$

بين اللحظة t و $t + \Delta t$ تتغير السرعة بـ Δv ويساوي التسارع تقريبا $\Delta v/\Delta t$

بالنسبة لـ $\Delta t = 1{,}50.10^{-4}$ s

$$a_i = 5{,}92 - 2755.v_i$$

و $\Delta v = v_{i+1} - v_i = 1{,}50.10^{-4}.a_i$

أي $v_{i+1} = v_i + 1{,}50.10^{-4}.a_i$

الشروط البدئية : $v_0 = 0\ m.s^{-1}$ و $a_0 = 5{,}92\ m.s^{-2}$

وبطريقة رقمية تكرارية :

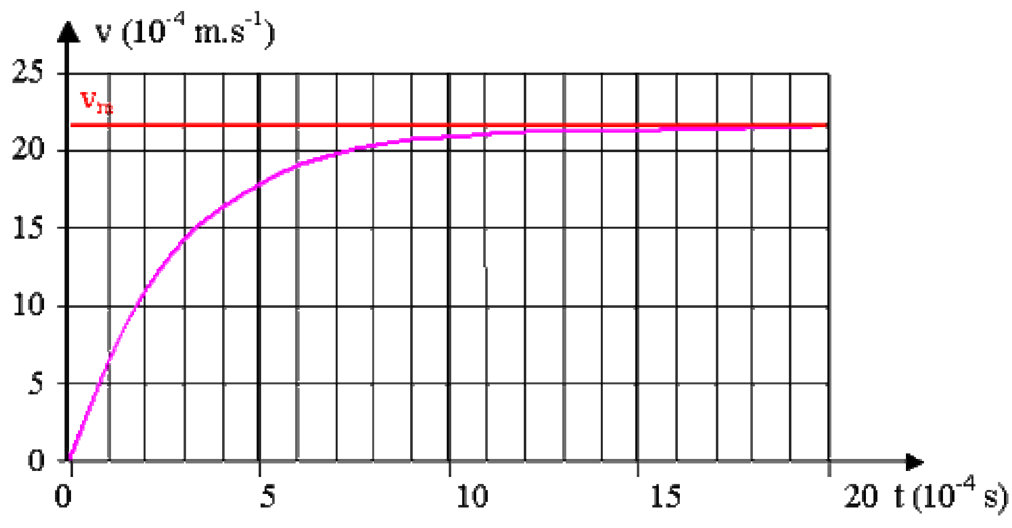
- $v_1 = v_0 + 1{,}50.10^{-4}.a_0 = 0 + 1{,}50.10^{-4} \times 5{,}92 = 8{,}90.10^{-4}$ s
- $a_1 = 5{,}92 - 2755.v_1 = 5{,}92 - 2755 \times 8{,}90.10^{-4} = 3{,}47\ m.s^{-2}$
- $v_2 = v_1 + 4{,}0.10^{-5}.a_1 = 8{,}90.10^{-4} + 1{,}50.10^{-4} \times 3{,}47 = 14{,}1.10^{-4}$ s
- $a_2 = 5{,}92 - 2755.v_2 = 5{,}92 - 2755 \times 14{,}1.10^{-4} = 2{,}04\ m.s^{-2}$

وبنفس الطريقة نملأ الجدول التالي ونتوقف عند السرعة الحدية :

.

t (10^{-4} s)	0,0	1,5	3,0	4,5	6,0	7,5	9,0	10,5	12	13,5	15	16,5	18	19,5	21
v (10^{-4} ms^{-1})	0,00	8,90	14,1	17,1	18,9	20,0	20,6	21,0	21,2	21,3	21,4	21,4	21,5	21,5	21,5
a (ms^{-2})	5,92	3,47	2,04	1,20	0,70	0,41	0,24	0,14	0,08	0,05	0,03	0,02	0,01	0,01	0,00

2) المنحنى الممثل لتغير السرعة بدلالة الزمن



حركة مركز قصور الكرية تتم عبر نظامين : نظام بدئي تتغير خلاله السرعة ونظام دائم تأخذ فيه السرعة قيمة ثابتة تساوي السرعة الحدية $v_m = 21{,}5.10^{-4}\ m.s^{-1}$ (انظر الجدول)

3) المعادلة :

$$\frac{dv}{dt} + Bv = A$$

الحل: $v = ae^{-t/\tau} + b$

ومنه $\frac{dv}{dt} = \frac{-a}{\tau}e^{-t/\tau}$ نعوض في المعادلة التفاضلية :

$$-\frac{a}{\tau}e^{-t/\tau} + B(ae^{-t/\tau} + b) = A$$

$$ae^{-t/\tau}(B - \frac{1}{\tau}) + Bb = A$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{\tau}$$

$$\Rightarrow b = \frac{A}{B}$$

الشروط الأولية : عند $t = 0$ تنطلق الكرية بدون سرعة $V_0 = 0$

نعوض في $V = ae^{-t/\tau} + b$ أي

$$0 = ae^0 + b \Leftrightarrow a + b = 0$$

$$\Rightarrow a = -b$$

$$v = b(1 - e^{-t/\tau})$$

$$b = A\tau \Rightarrow v = A\tau(1 - e^{-t/\tau})$$

مما سبق $A = a_0$ ومنه $b = a_0.\tau$ أي

$b = v_m$ إذا $\boxed{v = v_m(1 - e^{-t/\tau})}$

كل الملاحظات حول هذا الدرس المرجو الاتصال عبر البريد الالكتروني :

h_elghzizal@hotmail.com

مرجع الفقرة : حل المعادلة التفاضلية للحركة بتطبيق طريقة أولير Euler

http://montblancsciences.free.fr/terms/physique/cours/p12.htm