Les cinq questions sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse correcte et justifiée rapporte 1 point.

1. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la droite D dont on donne une représentation paramétrique, et le plan P dont on donne une équation cartésienne :

$$D \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = -5 - 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ et } P : 3x + 2y - z - 5 = 0.$$

Affirmation 1 : la droite D est strictement parallèle au plan P.

2. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le point A(1 ; 9 ; 0) et le plan P d'équation cartésienne : $4x - y - z + 3 = 0$.

Affirmation 2 : la distance du point A au plan P est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Soit la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = \dfrac{3}{1 + e^{-2x}}$. On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

Affirmation 3 : la courbe C admet deux asymptotes parallèles à l'axe des abscisses.

4. Pour tout réel x, on pose $F(x) = \int_1^x (2 - t)\, e^{-t}\, dt$.

Affirmation 4 : $F(x)$ est négatif ou nul quelle que soit la valeur du réel x supérieur à 1.

5. On considère l'intégrale $I = \int_1^e t^2 \ln t \, dt$.

Affirmation 5 : la valeur exacte de l'intégrale I est : $\dfrac{2e^3 + 1}{9}$.

CORRECTION

1. Affirmation 1 : VRAIE

Une droite dans l'espace est soit strictement parallèle au plan P et donc n'a pas de point d'intersection avec P, soit est contenue dans P et donc a une infinité de points communes avec P, soit perce le plan P et a donc un seul point commun avec P.

Cherchons les points communs à P et à D, un tel point a des coordonnées qui vérifient simultanément : $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = -5 - 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ et $3x + 2y - z - 5 = 0$.

donc $3(1 - 2t) + 2t - (-5 - 4t) - 5 = 0 \Leftrightarrow 3 - 6t + 2t + 5 + 4t - 5 = 0$

$\Leftrightarrow 3 = 0$

ceci est impossible donc D et P n'ont pas de point commun, D est parallèle à P.

On aurait aussi pu montrer que le vecteur $\vec{n}$, vecteur normal au plan P, de coordonnées (3 ; 2 ; – 1) et le vecteur $\vec{u}$, vecteur directeur de D, de coordonnées (– 2 ; 1 ; – 4) sont orthogonaux :

$\vec{n} \cdot \vec{u} = 3 \times (-2) + 2 \times 1 - 1 \times (-4) = -6 + 2 + 4 = 0$ donc les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux : D est parallèle à P.

2. Affirmation 2 : FAUSSE

la distance $d(M_0, P)$ du point M_0 au plan P d'équation $a x + b y + c + d = 0$ est telle que : $d(M_0, P) = \dfrac{|a x_0 + b y_0 + c z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

donc a distance du point A au plan P est égale à $\dfrac{|4 \times 1 - 9 - 0 + 3|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{18}} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

3. Affirmation 3 : VRAIE

$\lim\limits_{x \to -\infty} -2x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc par composition :

$\lim\limits_{x \to -\infty} 1 + e^{-2x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -2x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc par composition : $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + e^{-2x} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

La courbe C admet deux asymptotes parallèles à l'axe des abscisses d'équation $y = 0$ et $y = 1$

4. Affirmation 4 : FAUSSE

Soit $\begin{cases} u'(t) = \mathrm{e}^{-t} & u(t) = -\mathrm{e}^{-t} \\ v(t) = 2 - t & v'(t) = -1 \end{cases}$ donc $F(x) = \left[-(2-t)\,\mathrm{e}^{-t} \right]_1^x - \int_1^x -(-\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t$

$F(x) = -(2-x)\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-1} - \left[-\mathrm{e}^{-t} \right]_1^x$

$F(x) = -(2-x)\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-1} - (-\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-1}) = -(2-x)\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}$

$F(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$.

La fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$, donc quelle que soit la valeur du réel x supérieur à 1, $F(x) \geq 0$

5. Affirmation 5 : VRAIE

Soit $\begin{cases} u'(t) = t^2 & u(t) = \dfrac{1}{3}t^3 \\ v(t) = \ln t & v'(t) = \dfrac{1}{t} \end{cases}$ donc $I = \left[\dfrac{1}{3}t^3 \ln t \right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \dfrac{1}{3}t^3 \times \dfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t$

$I = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^3 - \dfrac{1}{3}\int_1^{\mathrm{e}} t^2\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow I = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^3 - \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{3}t^3 \right]_1^{\mathrm{e}} \Leftrightarrow I = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^3 - \dfrac{\mathrm{e}^3 - 1}{9}$

$\Leftrightarrow I = \dfrac{2\,\mathrm{e}^3 + 1}{9}$