Guadeloupe-Guyane-Martinique-juin 1999

Lors d'un examen, un questionnaire à choix multiple (Q.C.M) est utilisé.

On s'intéresse à cinq questions de ce (Q.C.M) supposées indépendantes.

A chaque question sont associées quatre affirmation, numérotées 1 , 2 , 3 et 4 , dont une seule est exacte. Un candidat doit répondre à chaque question en donnant seulement le numéro de l'affirmation qu'il juge exacte. Sa réponse est correcte si l'affirmation qu'il a retenue est vraie, sinon sa réponse est incorrecte.

Dans cet exercice, les probabilités demandées seront données sous forme fractionnaire.

1 : Un candidat répond à chaque question au hasard, c'est à dire qu'il considère que les quatre affirmations correspondantes sont équiprobables.

a : Calculer la probabilités des événements suivants :

A : " Le candidat répond correctement à la première des cinq questions";

B : " Le candidat répond correctement à deux questions au moins sur les cinq questions ".

b : On attribue la note 4 à toute réponse correcte et la note (– 1) à toute réponse incorrecte.

Calculer la probabilité de l'événement C : " Le candidat obtient une note au moins égale à 10 pour l'ensemble des cinq questions."

2 : On suppose maintenant qu'un candidat connaît la réponse correcte à deux questions et qu'il répond au hasard aux trois autres questions.

Quelle est alors la probabilité de l'événement C décrit en **1 :** ***b*** **:** ?

CORRECTION

1 : Si X est le nombre réponse correcte du candidat sur les cinq questions, comme ses réponses sont indépendantes et que la probabilité pour chaque question d'avoir une réponse correcte est (p = 0,25), on peut dire que X suit une loi binomiale de paramètre (n = 5) et (p = 0,25), et pour tout k entier,

$p(X = k) = C_5^k\ (0{,}25)^k\,(0{,}75)^{(5-k)}$

a **:** $p(A) = 0{,}25$, réponse évidente.

$p(B) = p(X \geq 2)$

$p(B) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1)$

$p(B) = 1 - (0{,}75)^5 - 5.(0{,}25) \times (0{,}75)^4$

$p(B) = \dfrac{47}{128} = 0{,}3671875.$

b **:** Si la candidat obtient un note 4 pour une réponse correcte et une note (– 1) pour une réponse incorrecte, alors la variable aléatoire N correspondant au nombre total de ses points s'exprime en fonction de X de la façon suivante :

$N = 4\,X + (5 - X)\,(-1) = 5\,X - 5$

L'événement "$N \geq 10$" s'écrit alors "$X \geq 3$".

La probabilité pour le candidat d'obtenir une note au moins égale à 10 est donc :

$p = p(X = 3) + p(X = 4) + p(X = 5)$

$p = p(B) - p(X = 2) = \dfrac{47}{128} - \dfrac{135}{512} = \dfrac{53}{512}$.

2 : Si le candidat connaît la réponse correcte à deux questions, il a déjà 8 points.

La probabilité demandée est alors celle de l'événement suivant " Obtenir au moins 2 points en 3 questions", ce qui correspond à "Avoir au moins une réponse correcte en 3 questions".

L'événement contraire est "Aucune réponse correcte en 3 questions".

La probabilité demandée est donc : $1 - (0{,}75)^3 = \dfrac{37}{64} \approx 0{,}578125.$