EXERCICE 1 Baccalauréat S France septembre 2005
Partie A

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = (20x + 10)\ e^{-\frac{1}{2}x}$.

On note C la courbe représentative de la fonction f dans ³ un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, (unité graphique 1 cm).

1. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.
3. Établir que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α.
4. Tracer la courbe C .

Partie B
On note $y(t)$ la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t , t étant exprimé en heures.
La valeur initiale, à l'instant $t = 0$, est $y(0) = 10$.
On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$ associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle (E) :
$y' + \frac{1}{2}y = 20\ e^{-\frac{1}{2}t}$.

1. Vérifier que la fonction f étudiée dans la **partie A** est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
2. On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.
a. On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $[0 ; +\infty[$ vérifiant $g(0) = 10$. Démontrer que la fonction $g - f$ est solution, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, de l'équation différentielle : (E′) $y' + \frac{1}{2}y = 0$.
b. Résoudre l'équation différentielle (E′).
c. Conclure.
3. Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescent-elle à sa valeur initiale ? Le résultat sera arrondi à la minute.
4. La valeur θ en degrés Celsius de la température moyenne à cette réaction chimique durant les trois premières heures est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 3]$.
Calculer la valeur exacte de θ, puis donner la valeur approchée décimale de θ arrondie au degré.

CORRECTION
Partie A

1. $f(x) = (20x + 10)\,e^{-\frac{1}{2}x}$

Soit $X = -\frac{1}{2}x$ donc $x = -2X$

$\lim_{x \to +\infty} X = -\infty$

$f(x) = (-40X + 10)\,e^X = -40X\,e^X + 10\,e^X$.

$\lim_{X \to -\infty} X\,e^X = 0$ et $\lim_{X \to -\infty} e^X = 0$ donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

2. $f'(x) = 20\ e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}(20x + 10)\,e^{-\frac{1}{2}x}$

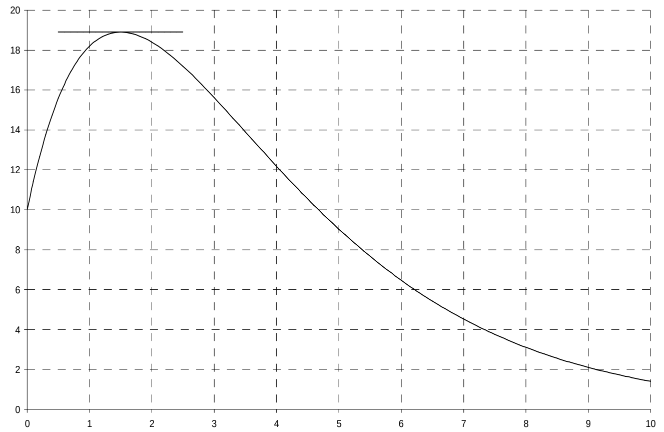
$f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x}[20 - 10x - 5] = e^{-\frac{1}{2}x}(15 - 10x)$

x	0		1,5		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
f	10	↗	$40\,e^{-0,75}$	↘	0

3. La fonction f est définie continue strictement croissante sur $[0 ; 15]$, $f(0) = 10$ donc pour tout x de $]0 ; 15]$, $f(x) > 10$, en particulier $M > 10$
donc l'équation $f(x) = 10$ n'admet pas de solution dans $]0 ; 15]$.
La fonction f est définie continue strictement décroissante sur $[15 ; +\infty[$, $f([15 ; +\infty[) =]0 ; M]$,
$M > 10$ donc $10 \in\ ]0 ; M]$, donc l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle $[1,5 ; +\infty[$.
Donc l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α.
$f(4,673) > 10$ et $f(4,674) < 10$ donc $\alpha \approx 4,673$

4. Tracer la courbe C .



5. Par intégration par parties :

Soit $u(x) = 20\,x + 10$ alors $u'(x) = 20$

$v(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$ alors $V(x) = -2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$ donc $I = \left[-2\times(20\,x+10)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^3 - \int_0^3 -2\times 20\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\,\mathrm{d}\,x$

$I = -140\,\mathrm{e}^{-1,5} + 20 + 40\int_0^3 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\,\mathrm{d}\,x$

$I = -140\,\mathrm{e}^{-1,5} + 20 + 40\left[-2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^3$

$I = -140\,\mathrm{e}^{-1,5} + 20 + 40\,(-2\,\mathrm{e}^{-1,5} + 2)$

$I = 100 - 220\,\mathrm{e}^{-1,5}$

Partie B

1. $f'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}(15 - 10\,x)$ et $f(x) = (20\,x + 10)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$

donc $f'(x) + \frac{1}{2}f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}(15 - 10\,x) + \frac{1}{2}(20\,x + 10)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$

$f'(x) + \frac{1}{2}f(x) = 20\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ donc f est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2. *a.* g est solution de (E) et $g(0) = 10$ donc $g'(t) + \frac{1}{2}g(t) = 20\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ et $g(0) = 10$

$(g-f)' + \frac{1}{2}(g-f) = g' - f' + \frac{1}{2}g - \frac{1}{2}f = g' + \frac{1}{2}g - (f' + \frac{1}{2}f)$

or pour tout t de $[0\,;+\infty[$:

$g'(t) + \frac{1}{2}g(t) = 20\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ et $f'(t) + \frac{1}{2}f(t) = 20\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ donc $g' + \frac{1}{2}g - (f' + \frac{1}{2}f) = 0$ soit : $(g-f)' + \frac{1}{2}(g-f) = 0$

$g - f$ est donc solution, sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, de l'équation différentielle (E′) : $y' + \frac{1}{2}y = 0$.

b. **Résoudre l'équation différentielle (E′).**

(E′) a pour solutions les fonctions de la forme $y(t) = C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$

c. **Conclure.**

$g - f$ est solution, sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, de l'équation différentielle (E′) : $y' + \frac{1}{2}y = 0$ donc $g(t) - f(t) = C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$

or $g(0) = 10$ et $f(0) = 10$ donc $g(0) - f(0) = 0 = C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\times 0} = C$

donc pour tout t de $[0\,;+\infty[$, $g(t) - f(t) = 0$

Donc la fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.

3. Répondre à cette question c'est chercher les solutions de l'équation $f(x) = 10$

Dans la partie A, on a démontré qu'il n'*y a* que deux solutions : 0 et α

$\alpha \approx 4{,}673$ heures soit au bout de $60 \times 4{,}673$ minutes soit 280 minutes donc au bout de 4 heures 40 minutes.

4. $\theta = \frac{1}{3}\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}\,x$ donc $\theta = \frac{1}{3}(100 - 220\,\mathrm{e}^{-1,5})$ soit $\theta \approx 17$ °