Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;2]$ par $f(x) = \sqrt{4-2x}$.

Variations de f :

a. Écrire f comme composée de deux fonctions usuelles que l'on explicitera.

b. En déduire le sens de variations de f sur $]-\infty\,;2]$.

Dérivabilité de f :

a. Déterminer $f'(x)$ pour tout x de $]-\infty\,;2[$.

b. Étudier la dérivabilité de f en 2 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Approximation affine:

a. Déterminer l'approximation affine de f au voisinage de 0.

b. En déduire une valeur approchée de $\sqrt{3,998}$,

CORRECTION

1\. *a*. Soit $u(x) = 4-2x$ et $v(x) = \sqrt{x}$ alors $x \xrightarrow{u} 4-2x \xrightarrow{v} \sqrt{4-2x}$ donc $f = v \circ u$

1\. *b*. La fonction u est une fonction affine (de la forme $u(x) = a\,x + b$ avec $a < 0$) donc est décroissante sur $]-\infty\,;2]$

Sur $]-\infty\,;2]$, $x \le 2$ donc $2x \le 4$ donc $4-2x \ge 0$ or sur $[0\,;+\infty[$, la fonction v est croissante

La composée d'une fonction croissante v et d'une fonction décroissante u est une fonction décroissante donc f est décroissante sur $]-\infty\,;2]$

2\. *a*. La dérivée de $\sqrt{u}$ est $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, ici $u(x) = 4-2x$ donc $u'(x) = -2$ et $f'(x) = \dfrac{-2}{2\sqrt{4-2x}} = -\dfrac{1}{\sqrt{4-2x}}$.

2\. *b*. f est définie sur $]-\infty\,;2]$ donc pour étudier la dérivabilité de f en 2, il faut déterminer la limite quant h tend vers 0^- de $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{\sqrt{4-2(2+h)}}{h} = \frac{\sqrt{-2h}}{h} = \frac{\sqrt{-2h}\times\sqrt{-2h}}{h\sqrt{-2h}} = \frac{-2h}{h\sqrt{-2h}} = \frac{-2}{\sqrt{-2h}}$$

$\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} -2h = 0^+$ or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{x} = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \sqrt{-2h} = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \dfrac{1}{\sqrt{-2h}} = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \dfrac{-2}{\sqrt{-2h}} = -\infty$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = -\infty$$

f n'est pas dérivable en 2, $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = -\infty$ donc la courbe de f admet au point d'abscisse 2 une tangente verticale.

3\. *a*. une approximation affine de f au voisinage de 0 est $f(0) + x\,f'(0)$

$f(0) = \sqrt{4-2\times 0} = 2$ et $f'(0) = -\dfrac{1}{\sqrt{4-2\times 0}} = -\dfrac{1}{2}$ une approximation affine de f au voisinage de 0 est $2 - \dfrac{1}{2}x$

3\. *b*. $3,998 = 4 - 2\times 0,001$ donc $3,998 = f(0,001)$ or une approximation affine de f au voisinage de 0 est $2 - \dfrac{1}{2}x$ donc $f(0,001)$ est approximativement égal à $2 - \dfrac{1}{2}\times 0,001$ soit à 1,9995

Une valeur approchée de $\sqrt{3,998}$ est 1,9995