Les parties B et C sont indépendantes.

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction f définie sur R par $f(x) = x\,e^{x-1} + 1$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\,\vec{j})$.

Partie A : étude de la fonction

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

Que peut-on en déduire pour la courbe C ?

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. On admet que f est dérivable sur R, et on note f' sa fonction dérivée.

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (x+1)\,e^{x-1}$.

4. Étudier les variations de f sur R et dresser son tableau de variation sur R.

Partie B : recherche d'une tangente particulière

Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe C au point d'abscisse a, qui passe par l'origine du repère.

1. On appelle T_a la tangente à C au point d'abscisse a. Donner une équation de T_a.

2. Démontrer qu'une tangente à C en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si a vérifie l'égalité $1 - a^2\,e^{a-1} = 0$.

3. Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.

Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ de l'équation $1 - x^2\,e^{x-1} = 0$.

4. Donner alors une équation de la tangente recherchée.

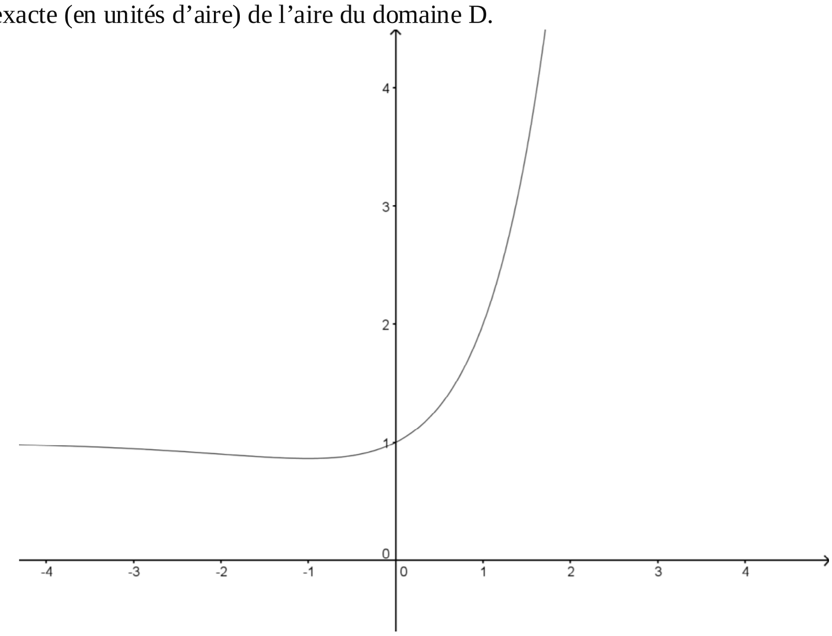
Partie C : calcul d'aire

Le graphique donné en Annexe 1 représente la courbe C de la fonction f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\,\vec{j})$.

1. Construire sur ce graphique la droite Δ d'équation $y = 2\,x$. On admet que la courbe C est au-dessus de la droite Δ. Hachurer le domaine D limité par la courbe C la droite Δ, la droite d'équation $(x = 1)$ et l'axe des ordonnées.

2. On pose $I = \int_0^1 x\,e^{x-1}\,dx$. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $I = \dfrac{1}{e}$.

3. En déduire la valeur exacte (en unités d'aire) de l'aire du domaine D.



CORRECTION

Les parties B et C sont indépendantes.

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction f définie sur R par $f(x) = x\,e^{x-1} + 1$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\,\vec{j})$.

Partie A : étude de la fonction

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

$x\,e^{x-1} = x\,e^{x} \times e^{-1}$ or $\lim\limits_{x \to -\infty} x\,e^{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} x\,e^{x-1} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ donc la courbe C admet pour asymptote en $-\infty$ la droite d'équation $y = 1$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x-1} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

3. Soit $\begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v(x) = \mathrm{e}^{x-1} & v'(x) = \mathrm{e}^{x-1} \end{cases}$ donc $f'(x) = \mathrm{e}^{x-1} + x\,\mathrm{e}^{x-1}$ donc pour tout réel x, $f'(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{x-1}$.

4.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	
e^{x-1}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$1-\mathrm{e}^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B : recherche d'une tangente particulière

1. Une équation de T_a est $y = (a+1)\,\mathrm{e}^{a-1}(x-a) + a\,\mathrm{e}^{a-1} + 1$

2. Une tangente à C en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si $0 = (a+1)\,\mathrm{e}^{a-1}(0-a) + a\,\mathrm{e}^{a-1} + 1$

soit si et seulement si a vérifie l'égalité $-a^2\,\mathrm{e}^{a-1} - a\,\mathrm{e}^{a-1} + a\,\mathrm{e}^{a-1} + 1 = 0$

soit si et seulement si a vérifie l'égalité $1 - a^2\,\mathrm{e}^{a-1} = 0$.

3. Soit $g(x) = 1 - x^2\,\mathrm{e}^{x-1}$

g est définie dérivable sur R et $g'(x) = -2x\,\mathrm{e}^{x-1} - x^2\,\mathrm{e}^{x-1}$

$g'(x) = -x\,\mathrm{e}^{x-1}(x+2)$

Sur $]\,0\,;+\infty\,[$, $-x < 0$; $x+2 > 0$ et $\mathrm{e}^{x-1} > 0$ donc $g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$

g est définie continue strictement décroissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$

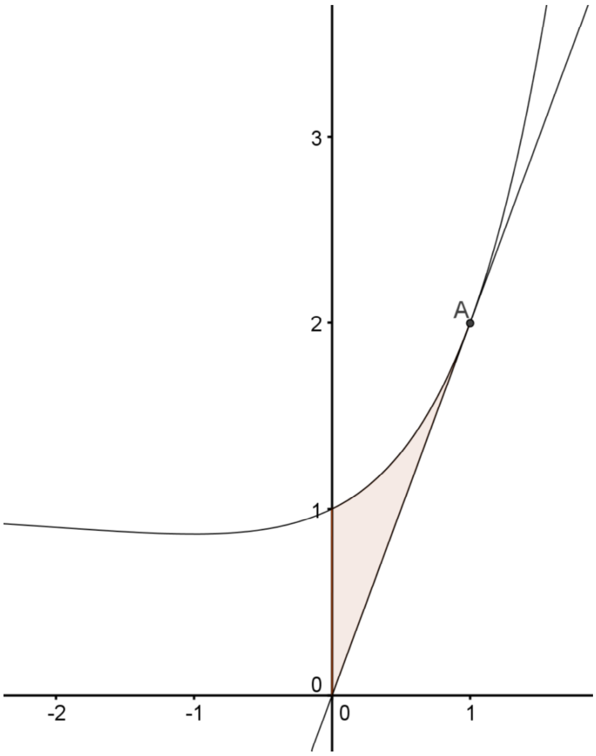
$g(]\,0\,;+\infty\,[) =]-\infty\,;1\,[$, $0 \in]-\infty\,;1\,[$, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

$g(1) = 1 - \mathrm{e}^0 = 0$ donc 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ de l'équation $1 - x^2\,\mathrm{e}^{x-1} = 0$.

4. $a = 1$ donc la tangente cherchée est T_1, elle a pour équation $y = 2(x-1) + 2$, c'est-à-dire $y = 2x$

Partie C : calcul d'aire

1.



2. $I = \int_0^1 x\,\mathrm{e}^{x-1}\,\mathrm{d}x$.

Soit $\begin{cases} u'(x) = \mathrm{e}^{x-1} & u(x) = \mathrm{e}^{x-1} \\ v(x) = x & v'(x) = 1 \end{cases}$

donc $I = \left[\, x\,\mathrm{e}^{x-1} \right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^{x-1}\,\mathrm{d}x$

$I = \left[\, x\,\mathrm{e}^{x-1} \right]_0^1 - \left[\, \mathrm{e}^{x-1} \right]_0^1 = \mathrm{e}^0 - 0 - (\mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^{-1})$ donc $I = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

3. La tangente est en dessous de la courbe sur $[\,0\,;1]$ donc l'aire du domaine D est $A = \int_0^1 [\, f(x) - 2x \,]\,\mathrm{d}x$

$A = \int_0^1 x\,\mathrm{e}^{x-1}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (1 - 2x)\,\mathrm{d}x$

$A = \dfrac{1}{\mathrm{e}} + \left[\, x - x^2 \right]_0^1 = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.