

La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ , avec $\lambda > 0$.

Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t est égale à $p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$

1. Déterminer λ , arrondi à 10^{-1} près, pour que la probabilité $p(X > 6)$ soit égale à 0,3.

Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,2$.

2. À quel instant t , à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de 0,5 ?

3. Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $e^{-0,4}$.

4. Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est, à 10^{-2} près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?

5. On considère un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendante.

Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années

Correction

La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ , avec $\lambda > 0$.

Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t est égale à $p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$

$$p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$p(X > t) = 1 - p(X \leq t) = e^{-\lambda t}$$

1. Déterminer λ , arrondi à 10^{-1} près, pour que la probabilité $p(X > 6)$ soit égale à 0,3.

$$p(X > 6) = e^{-6\lambda} = 0,3 \Leftrightarrow -6\lambda = \ln 0,3 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 0,3}{-6}$$

$$\lambda \approx 0,2$$

2. À quel instant t , à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de 0,5 ?

$$p(X \leq t) = 0,5 \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda t} = 0,5 \Leftrightarrow e^{-\lambda t} = 0,5 \Leftrightarrow -\lambda t = \ln 0,5$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln 0,5}{-\lambda} \text{ donc en prenant } \lambda = 0,2, t \approx 3,5 \text{ ans}$$

3. Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $e^{-0,4}$.

$$p(X > 2) = e^{-2\lambda} = e^{-0,4}$$

4. Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est, à 10^{-2} près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?

$$p_{X \geq 2}(X \geq 6) = p(X \geq 4) \text{ (la loi exponentielle est une loi à durée de vie sans vieillissement)}$$

$$p_{X \geq 2}(X \geq 6) = e^{-4\lambda} = e^{-0,8} \approx 0,449$$

5. On considère un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendante.

Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années

On a une succession de 10 expériences aléatoires, identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :

succès : le robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années ($p = e^{-0,4}$)

échec : le robot a eu une panne au cours des deux premières années ($q = 1 - e^{-0,4}$)

donc la variable aléatoire qui représente le nombre de robots n'ayant pas eu de panne au cours des deux premières années suit une loi binomiale de paramètres $(10 ; e^{-0,4})$

$$p = p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - (1 - e^{-0,4})^{10}$$