Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = 1 + \ln(1+x)$.
On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
On note D la droite d'équation $y = x$.

Partie A

1. *a.* Étudier le sens de variation de la fonction f.
b. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.
a. Déterminer $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$.
b. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.
c. Étudier le sens de variation de la fonction g, puis dresser le tableau de variations de la fonction g.
d. Montrer que sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β, avec α négative et β appartenant à l'intervalle $[2\,;3]$.
e. À l'aide des questions précédentes, déterminer le signe de $g(x)$. En déduire la position relative de la courbe C_f et de la droite D.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soit (u_n) la suite définie pour tout nombre entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $2 \leq u_n \leq \beta$.
2. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

CORRECTION

Partie A

1. *a.* $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ donc $f'(x) > 0$ sur $]-1\,;+\infty[$. f est strictement croissante sur $]-1\,;+\infty[$.

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -1^+} 1 + x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

2. *a.* $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = -\infty$

b. Soit $X = 1 + x$, $\lim\limits_{x \to +\infty} X = +\infty$ et $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = \dfrac{\ln X}{X}$ or $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = 0$.

$g(x) = (x+1)\left(\dfrac{\ln(x+1)}{x+1} - \dfrac{x}{x+1}\right)$

$\dfrac{x}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln(x+1)}{x+1} - \dfrac{x}{x+1}\right) = -1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

c. $g'(x) = f'(x) - 1 = \dfrac{1}{1+x} - 1 = -\dfrac{x}{x+1}$, $x + 1 > 0$ sur $]-1\,;+\infty[$ donc $g'(x)$ a le même signe que $-x$.

$f(0) = 1$ donc $g(0) = 1$

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0		
g	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

d. g est une fonction continue strictement croissante sur $]-1\,;0]$, $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = -\infty$ et $g(0) = 1$ donc $g(]-1\,;0[) =]-\infty\,;1]$

$0 \in]-\infty\,;1]$ donc l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]-1\,;0]$.

g est une fonction continue strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$,
$g(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ donc $g(]0\,;+\infty[) =]-\infty\,;1[$

$0 \in]-\infty\,;1[$ donc l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution notée β appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
$g(2) = \ln 3 - 1$ or $\ln 3 > 1$ donc $g(2) > 0$

$g(3) = \ln 4 - 2 = 2\,(\ln 2 - 1)$ or $\ln 2 < 1$ donc $g(3) < 0$
g est strictement décroissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$ donc $2 < \beta < 3$.
Sur l'intervalle $]-1\,;+\infty\,[$ l'équation $g\,(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β, avec α négative et β appartenant à l'intervalle $[2\,;3]$.
e.

x	-1		α		0		β		$+\infty$
g	$-\infty$	↗	0	↗	1	↘	0	↘	$-\infty$
$g(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	

Sur $]-1\,;\alpha\,[$, la courbe de f est en dessous de la droite D ; sur $]\,\alpha\,;\beta\,[$, la courbe de f est au dessus de la droite D
Sur $]\,\beta\,;+\infty\,[$, la courbe de f est en dessous de la droite D. La droite et la courbe se coupent aux points d'abscisses α et β.

Partie B

1. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n : $2 \le u_n \le \beta$.
Si $n = 0$, $u_0 = 2$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
Montrons que pour tout n, la propriété est héréditaire c'est-à-dire que pour tout n de $\mathbb{N}$, si $2 \le u_n \le \beta$ alors $2 \le u_{n+1} \le \beta$.
La fonction f est croissante sur $]-1\,;+\infty\,[$ donc si $2 \le u_n \le \beta$ alors $f(2) \le f(u_n) \le f(\beta)$.
$f(2) = 1 + \ln 3$ donc $f(2) \ge 2$
$g(\beta) = 0$ donc $f(\beta) = \beta$ de plus $u_{n+1} = f(u_n)$ donc $2 \le u_{n+1} \le \beta$.
La propriété est héréditaire pour tout n donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

2. $2 \le u_n \le \beta$ donc $g(u_n) \ge 0$ soit $f(u_n) - u_n \ge 0$ donc $u_{n+1} \ge u_n$. La suite (u_n) est croissante, majorée par β donc est convergente vers un réel ℓ tel que $2 \le \ell \le \beta$.