Antilles Guyane juin 2017

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct. On considère l'équation

$$(E) : z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$$

ayant pour inconnue le nombre complexe z.

1. Donner une solution entière de (E).

2. Démontrer que, pour tout nombre complexe z, $z^4 + 2z^3 - z - 2 = (z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1)$.

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

4. Les solutions de l'équation (E) sont les affixes de quatre points A, B, C, D du plan complexe tels que ABCD est un quadrilatère non croisé.

Le quadrilatère ABCD est-il un losange ? Justifier.

Asie juin 2017

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.
Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. On dispose de deux dés, identiques d'aspect, dont l'un est truqué de sorte que le 6 apparait avec la probabilité $\frac{1}{2}$. On prend un des deux dés au hasard, on le lance, et on obtient 6.

Affirmation 1 : la probabilité que le dé lancé soit le dé truqué est égale à $\frac{2}{3}$.

2. Dans le plan complexe, on considère les points M et N d'affixes respectives $z_M = 2\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z_N = \frac{3-i}{2+i}$.

Affirmation 2 : la droite (MN) est parallèle à l'axe des ordonnées.

Dans les questions 3. et 4., on se place dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace et l'on considère la droite d dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2, \\ z = 3 + 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

3. On considère les points A, B et C avec A $(-2 ; 2 ; 3)$, B $(0 ; 1 ; 2)$ et C $(4 ; 2 ; 0)$.

On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Affirmation 3 : la droite d est orthogonale au plan (ABC).

4. On considère la droite Δ passant par le point D $(1 ; 4 ; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{v}$ $(2 ; 1 ; 3)$.

Affirmation 4 : la droite d et la droite Δ ne sont pas coplanaires.

Centres étrangers juin 2017

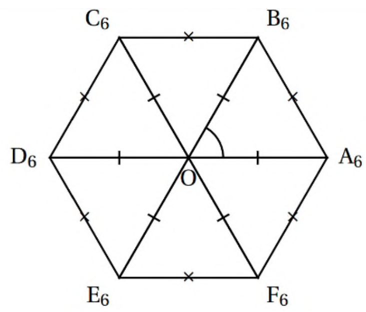
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Pour tout entier $n > 4$, on considère P_n un polygone régulier à n côtés, de centre O et dont l'aire est égale à 1. On admet qu'un tel polygone est constitué de n triangles superposables à un triangle OA_nB_n donné, isocèle en O.

On note $r_n = OA_n$ la distance entre le centre O et le sommet A_n d'un tel polygone.

Partie A : étude du cas particulier $n = 6$

On a représenté ci-contre un polygone P_6.



1. Justifier le fait que le triangle OA_6B_6 est équilatéral, et que son aire est égale à $\frac{1}{6}$.

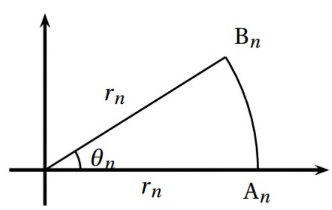
2. Exprimer en fonction de r_6 la hauteur du triangle OA_6B_6 issue du sommet B_6.

3. En déduire que $r_6 = \sqrt{\dfrac{2}{3\sqrt{3}}}$

Partie B : cas général avec $n \geq 4$

Dans cette partie, on considère le polygone P_n avec $n \geq 4$, construit de telle sorte que le point A_n soit situé sur l'axe réel, et ait pour affixe r_n.

On note alors $r_n = e^{i\theta_n}$ l'affixe de B_n où θ_n est un réel de l'intervalle $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.



1. Exprimer en fonction de r_n et θ_n la hauteur issue de B_n dans le triangle OA_nB_n puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\frac{r_n^2}{2}\sin(\theta_n)$.

2. On rappelle que l'aire du polygone P_n est égale à 1.

Donner, en fonction de n, une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{OB_n})$, puis démontrer que : $r_n = \sqrt{\dfrac{2}{n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}}$.

Partie C : étude de la suite (r_n)

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]\,0\,;\,\pi\,[$ par $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$.

Ainsi, le nombre r_n, défini dans la partie B pour $n \geq 4$, s'exprime à l'aide de la fonction f par : $r_n=\sqrt{\dfrac{1}{\pi}f\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}$

On admet que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]\,0\,;\,\pi\,[$.

1. Montrer que la suite (r_n) est décroissante.

On pourra pour cela commencer par démontrer que pour tout $n \geq 4$, on a : $0<\dfrac{2\pi}{n+1}<\dfrac{2\pi}{n}<\pi$

2. En déduire que la suite (r_n) converge. On ne demande pas de déterminer sa limite L, et on admet dans la suite de l'exercice que $L=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

3. On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES :	n est un nombre entier
TRAITEMENT :	n prend la valeur 4
	Tant que $\sqrt{\dfrac{2}{n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}}>0{,}58$ faire
	n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que
SORTIE :	Afficher n

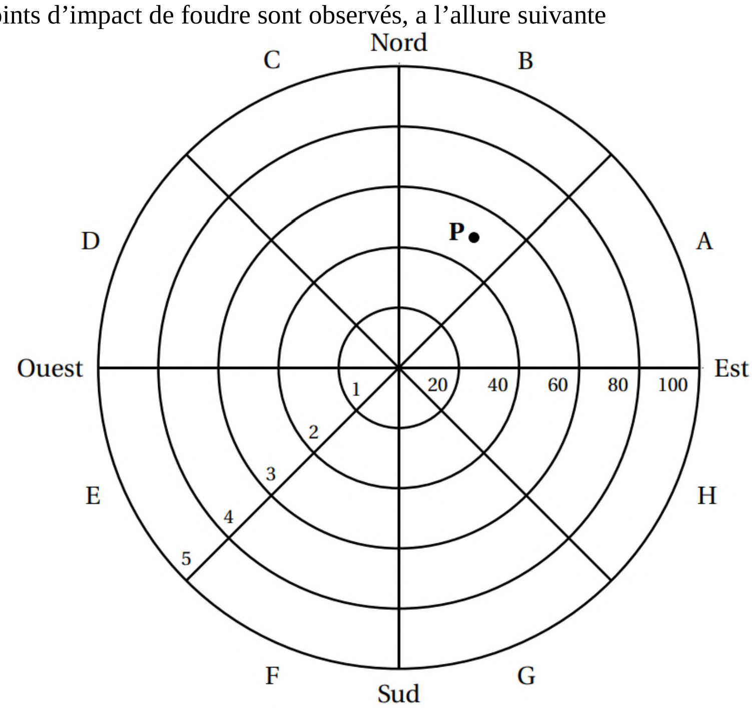
Quelle valeur numérique de n va afficher en sortie cet algorithme ?

Métropole juin 2017

Dans une vaste plaine, un réseau de capteurs permet de détecter la foudre et de produire une image des phénomènes orageux. Ces données servent en particulier aux services météorologiques pour améliorer leurs prévisions et pour permettre des interventions plus rapides sur les lieux, notamment en cas d'incendie.

Le but de l'exercice est d'étudier les impacts de foudre détectés par un capteur.

L'écran radar, sur lequel les points d'impact de foudre sont observés, a l'allure suivante



Le capteur de foudre étant représenté par le centre de l'écran, cinq cercles concentriques correspondant aux rayons respectifs 20, 40, 60, 80 et 100 kilomètres délimitent dans l'ordre cinq zones, numérotées de 1 à 5, définies par leur distance au capteur.

De plus, huit segments partant du capteur délimitent huit portions, de même ouverture angulaire, nommées dans le sens trigonométrique de A à H.

L'écran est ainsi partagé en quarante secteurs dénommés par une lettre et un nombre entre 1 et 5. Par exemple, le point P positionné sur la figure est situé dans le secteur B3.

On assimile l'écran radar à une partie du plan complexe en définissant un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$ de la manière suivante :

- l'origine O marque la position du capteur ;
- l'axe des abscisses est orienté d'Ouest en Est ;
- l'axe des ordonnées est orienté du Sud au Nord ;
- l'unité choisie est le kilomètre.

Dans la suite, un point de l'écran radar est associé à un point d'affixe z.

PARTIE A

1. On note z_P l'affixe du point P situé dans le secteur B3 sur le graphique précédent. On appelle r le module de z_P et θ son argument dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.

Parmi les quatre propositions suivantes, déterminer la seule qui propose un encadrement correct pour r et pour θ (aucune justification n'est demandée) :

Proposition a	Proposition B	Proposition C	Proposition D
$40 < r < 60$	$20 < r < 40$	$40 < r < 60$	$0 < r < 60$
et	et	et	et
$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} < \theta < -\frac{\pi}{4}$

2. Un impact de foudre est matérialisé sur l'écran en un point d'affixe z. Dans chacun des deux cas suivants, déterminer le secteur auquel ce point appartient :

a. $z = 70\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$; ***b.*** $z = -45\sqrt{3} + 45\,i$.

Partie B

On suppose dans cette partie que le capteur affiche un impact au point P d'affixe $50\,e^{i\frac{\pi}{3}}$.

En raison d'imprécisions de mesures, le point d'impact affiché ne donne qu'une indication approximative du point d'impact réel de la foudre.

Ainsi, lorsque le capteur affiche le point d'impact P d'affixe $50\,e^{i\frac{\pi}{3}}$, l'affixe z du point d'impact réel de la foudre admet :

- un module qui peut être modélisé par une variable aléatoire M suivant une loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart type $\sigma = 5$
- un argument qui peut être modélisé par une variable aléatoire T suivant une loi normale d'espérance $\frac{\pi}{3}$ et d'écart type $\frac{\pi}{12}$.

On suppose que les variables aléatoires M et T sont indépendantes, c'est-à-dire que, quels que soient les intervalles I et J, les évènements $(M \in I)$ et $(T \in J)$ sont indépendants.

Dans la suite les probabilités seront arrondies à 10^{-3} près.

1. Calculer la probabilité $P(M < 0)$ et interpréter le résultat obtenu.

2. Calculer la probabilité $P(M \in]40\,;60[)$.

3. On admet que $P\left(T \in \left]\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{2}\right[\right) = 0{,}819$. En déduire la probabilité que la foudre ait effectivement frappé le secteur B3 selon cette modélisation.

Nouvelle-Calédonie mars 2017

Répondre à chacune des affirmations ci-dessous par Vrai ou Faux en justifiant la réponse. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Les deux questions sont indépendantes l'une de l'autre.

1. La durée de vie T (exprimée en années) d'un appareil électronique suit la loi exponentielle de paramètre λ où $\lambda > 0$.

On sait qu'un tel appareil a une durée de vie moyenne de quatre ans.

La probabilité que cet appareil fonctionne deux années de plus sachant qu'il *a* déjà fonctionné trois ans est d'environ 0,39 à 0,01 près.

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

L'équation $z^3 - 3z^2 + 3z = 0$ admet trois solutions dans l'ensemble des nombres complexes C, qui sont les affixes de trois points formant un triangle équilatéral.

Pondichéry avril 2017

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

1. On considère l'équation (E) : $z^2 - 6z + c = 0$ où c est un réel strictement supérieur à 9.

a. Justifier que (E) admet deux solutions complexes non réelles.

b. Justifier que les solutions de (E) sont $z_A = 3 + i\sqrt{c-9}$ et $z_B = 3 - i\sqrt{c-9}$.

2. On note A et B les points d'affixes respectives z_A et z_B.

Justifier que le triangle OAB est isocèle en O.

3. Démontrer qu'il existe une valeur du réel c pour laquelle le triangle OAB est rectangle et déterminer cette valeur.