Liban juin 2008

Pour chacune des six propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ on considère la similitude directe f d'écriture complexe $z \to \frac{3}{2}(1 - i) z + 4 - 2 i$

Proposition 1 : « $f = r \circ h$ où h est l'homothétie de rapport $3\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de centre le point Ω d'affixe $-2-2i$ et où r est la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ ».

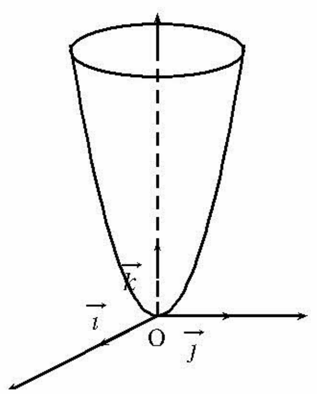
2. Pour tout entier naturel n non nul:
Proposition 2 : « $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 5 ». **Proposition 3 :** « $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7 ».

3. Dans le plan muni d'un repère, (D) est la droite d'équation $11x - 5y = 14$.

Proposition 4 : « les points de (D) à coordonnées entières sont les points de coordonnées $(5k + 14 ; 11k + 28)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

4. L'espace est rapporté à un repère orthonormal. $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
La surface Σ ci-contre a pour équation $z = x^2 + y^2$.
Proposition 5 : « la section de la surface Σ et du plan d'équation $x = \lambda$, où λ est un réel, est une hyperbole »

Proposition 6 : « le plan d'équation $z = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ partage le solide délimité par Σ et le plan d'équation $z = 9$ en deux solides de même volume ».
Rappel :
Soit V le volume du solide délimité par Σ et les plans d'équations $z = a$ et $z = b$ où $0 \le a \le b \le 9$.
V est donné par la formule $V = \int_a^b S(k)\, dk$ où $S(k)$ est l'aire de la section du solide par le plan d'équation $z = k$ où $k \in [a, b]$.



CORRECTION

1. VRAIE

L'expression complexe de f est $z' = \frac{3}{2}(1 - i) z + 4 - 2i$ de la forme $z' = az + b$ donc f est un similitude directe donc est décomposable en le produit d'une homothétie de rapport positif $\left|\frac{3}{2}(1-i)\right|$ et une rotation de même centre Ω d'angle $\arg\left(\frac{3}{2}(1-i)\right)$.

$\left|\frac{3}{2}(1-i)\right| = 3\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc le rapport de l'homothétie est $3\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\arg\left(\frac{3}{2}(1-i)\right) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) donc l'angle de la rotation est $-\frac{\pi}{4}$

Le centre de l'homothétie et de la rotation Ω est l'unique point invariant de f

Vérification : si $z = -2-2i$ alors $\frac{3}{2}(1-i)z + 4 - 2i = 3(1-i)(-1-i) + 4 - 2i = -6 + 4 - 2i$

donc si $z = -2-2i$, alors $\frac{3}{2}(1-i)z + 4 - 2i = -2 - i = z$

donc le point d'affixe $(-2-2i)$ est invariant par f donc $\Omega(-2-2i)$ est le centre de l'homothétie et de la rotation

2. Proposition 2 : FAUSSE
si $n = 1$, Soit $a = 5^7 + 2^4 = 78\,141$. Ce nombre ne termine ni par 0 ni par 5 donc n'est pas divisible par 5.

Proposition 3 : VRAIE
$2^3 \equiv 1\ [7]$ donc $2^{3n+1} \equiv 2\ [7]$
$5 \equiv -2\ [7]$ donc $5^2 \equiv 4\ [7]$ donc $5^6 \equiv 2^6\ [7]$ soit $5^6 \equiv 1\ [7]$ donc $5^{6n+1} \equiv 5\ [7]$ donc $5^{6n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0\ [7]$
Pour tout entier n non nul, $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7.

3. VRAIE
$11 \times 14 - 5 \times 28 = 14$

$11x - 5y = 14$ et $11 \times 14 - 5 \times 28 = 14$ donc par soustraction membre à membre : $11(x - 14) - 5(y - 28) = 0$
$11(x - 14) = 5(y - 28)$ donc 11 divise $5(y - 28)$ or 11 et 5 sont premiers entre eux donc 11 divise $y - 28$
Il existe un entier relatif k tel que $y - 28 = 11k$
donc en remplaçant dans $11(x - 14) = 5(y - 28)$, on obtient que $x - 14 = 5k$

donc $x = 5k + 14$ et $y = 11k + 28$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Vérification : si $x = 5k + 14$ et $y = 11k + 28$ alors $11x - 5y = 55k + 11 \times 14 - 55k - 28 \times 5 = 14$

donc l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) est $(5k + 14 ; 11k + 28)$ avec $k \in \mathbb{Z}$

4. Proposition 5 : FAUSSE

Si $x = \lambda$, $z = y^2 + \lambda^2$ est l'équation d'une parabole

Proposition 6 : VRAIE

L'intersection du solide par le plan d'équation $z = k$ est un cercle de centre $\Omega_k (0 ; 0 ; k)$ de rayon $\sqrt{k}$ donc d'aire πk

$V = \int_0^k S(k)\,\mathrm{d}k = \int_0^k \pi k\,\mathrm{d}k = \frac{1}{2}\pi k^2$

Si $k = \frac{9\sqrt{2}}{2}$, alors $V = \frac{81}{4}\pi$

Si $k = 9$, $V = \frac{1}{2}\pi \times 9^2 = \frac{81}{2}\pi$

Le volume compris entre le plan d'équation $z = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ et le plan d'équation $z = 9$, est égal à $\frac{81}{2}\pi - \frac{81}{4}\pi = \frac{81}{4}\pi$