Limites

1 Le problème

Ayant eu un appel à l'aide d'une élève de prépa qui se débattait avec des voisinages et des ε, je me suis mis à essayer de visualiser, sur un exemple, une limite finie en l'infini.

C'est une activité que je montrais à mes élèves sous GeoGebra et j'ai voulu faire la même chose (en moins dynamique !) en LaTeX.

2 Limite de fonction

Je suis parti de la fonction f, définie sur l'intervalle $I =]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 1 + \frac{\sin(x)}{x}.$$

C'est une fonction qui a pour limite 1 en $+\infty$, et qui a l'intérêt d'osciller autour de 1, contrairement aux fonctions $x \longmapsto 1 + \dfrac{1}{x}$ et $x \longmapsto 1 - \dfrac{1}{x}$ dont les représentations graphiques sont d'un même côté de la droite d'équation $y = 1$ sur l'intervalle I.

Le calcul de la limite en $+\infty$ se fait dès la terminale au moyen du théorème des gendarmes.

Dans le supérieur, on écrit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0 \mid \forall x > A,\ |f(x) - 1| < \varepsilon$$

ou encore

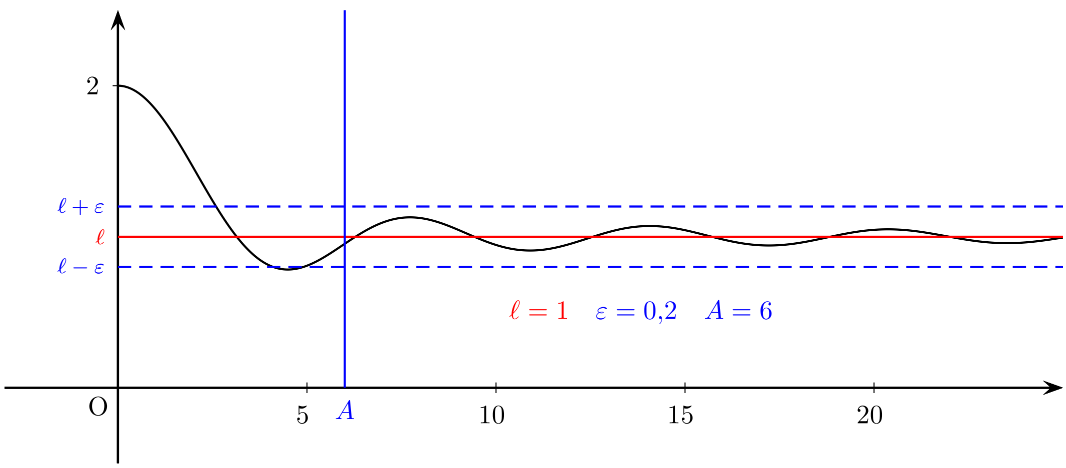
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0 \mid \forall x > A,\ 1 - \varepsilon < f(x) < 1 + \varepsilon$$

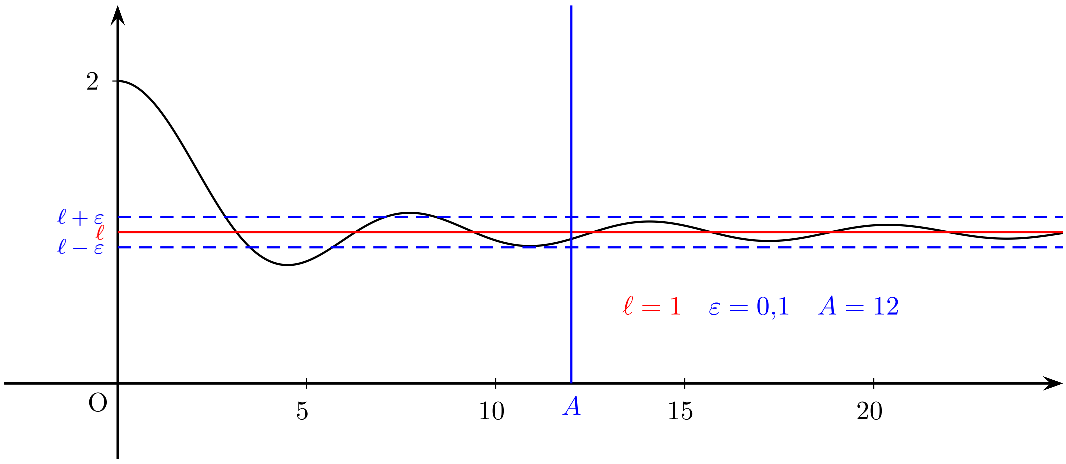
Graphiquement, on crée un « tube » autour de la limite et, pour x assez grand (en fait plus grand qu'une certaine valeur A), la courbe représentant la fonction f est « contenue » dans ce tube.

Le tube visualise le voisinage autour de la limite.

Le A dépend de ε, et plus ε est petit, plus A est grand.

Voici une visualisation pour $\varepsilon = 0{,}2$ et une pour $\varepsilon = 0{,}1$.





Techniquement, pas de grande difficulté ; on peut juste noter dans la définition de la fonction le `RadtoDeg` qui effectue la conversion de radian en degré. On trouve l'utilisation de ce « coefficient multiplicateur » dans le mode d'emploi de pstricks-add.

3 Limite de suite

On peut adapter ces graphiques pour des limites de suites (u_n) telles que $u_n = f(n)$.
Soit la suite (u_n) définie pour tout n de $\mathbf{N}^*$ par :

$$u_n = 1 + \frac{\sin(n)}{n}.$$

On démontre que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ ce qui s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N}^* \mid \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - 1| < \varepsilon$$

On va donc tracer un « tube » autour de la limite 1 et, à partir d'un certain rang n_0, tous les termes de la suite doivent se trouver dans ce tube.

Le seul changement par rapport au paragraphe précédent est de représenter une suite au lieu d'une fonction.

On va représenter les termes de la suite (u_n) pour n variant de 1 à 24, ce qui fait un total de 24 points ; on règle donc `plotpoints` à 24 en écrivant en option de `\psplot` :

```
plotpoints=24
```

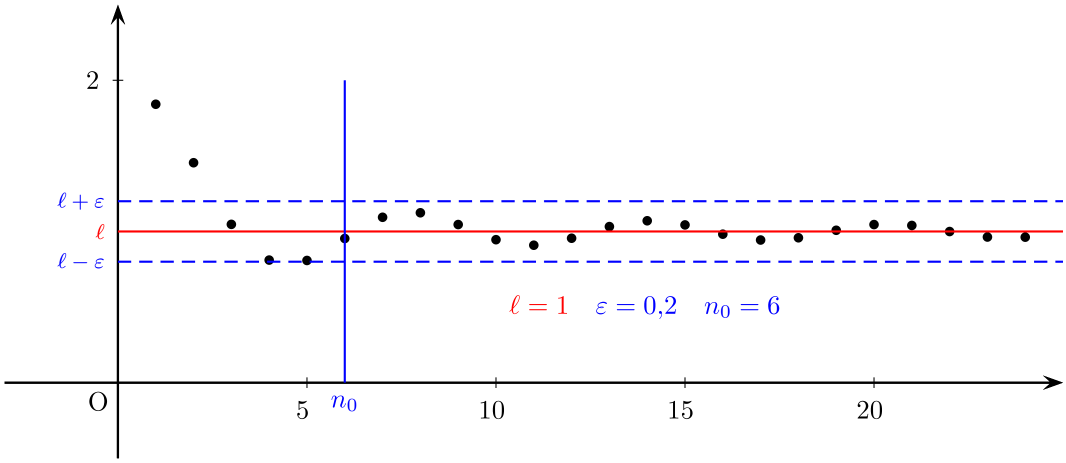
Ensuite il faut dire à `\psplot` de ne pas relier les points par des segments en entrant l'option :

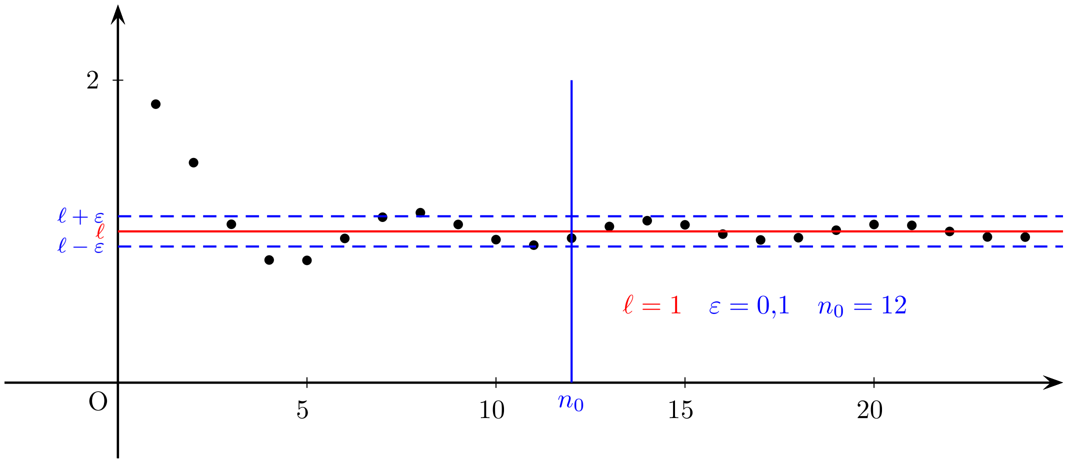
```
plotstyle=dots
```

Enfin on utilisera `\psplot` pour x variant entre 1 et 24.
Ce qui donne au final si on a défini la fonction dans la variable `\f` :

```
\psplot[plotpoints=24,plotstyle=dots]{1}{24}{\f}
```

Voici les deux graphiques correspondant à $\varepsilon = 0{,}2$ et à $\varepsilon = 0{,}1$:





On peut naturellement changer l'aspect des points avec `dotstyle` ou leur taille avec `dotscale` ; voici le graphique en utilisant l'instruction

`\psplot[plotpoints=24,plotstyle=dots,dotstyle=x,dotscale=1.5]{1}{24}{\f}` :