

Nouvelle Calédonie Novembre 2004

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

1. Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de $g(x)$.
2. Justifier que pour tout x , $(e^x - x)$ est strictement positif.

Partie B

1. a. Montrer que pour tout x non nul, $f(x) = \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1}$.

Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.

On admettra que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

1. b. Interpréter graphiquement les résultats précédents.
2. a. Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f .
2. b. Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
3. a. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
3. b. À l'aide de la partie A, étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).

CORRECTION

Partie A

1. $g'(x) = e^x - 1$ or $e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
g			

g est strictement décroissante sur $] -\infty; 0[$ et strictement croissante sur $] 0; +\infty[$ donc g admet un minimum en 0

Pour tout x réel, $g(x) \geq g(0)$ soit $g(x) \geq 0$ et $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2. Pour tout x réel, $g(x) \geq 0$ donc pour tout x réel, $e^x - x - 1 \geq 0$
soit pour tout x réel, $e^x - x \geq 1$. donc pour tout x , $(e^x - x)$ est strictement positif.

Partie B

1. a. pour tout x non nul, $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$

$$f(x) = \frac{x}{x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right)} = \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

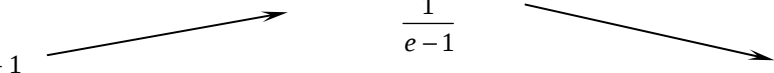
$$f(x) = \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1} \text{ or } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \times \frac{1}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1.$$

1. b. La courbe (C) admet pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y = 1$ et en $-\infty$, celle d'équation $y = -1$.

2. a. Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f .

$$u(x) = x \text{ et } v(x) = e^x - x \text{ donc } f'(x) = \frac{e^x - x - x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} \text{ donc } f'(x) = \frac{e^x(1 - x)}{(e^x - x)^2}$$

2. b. La fonction exponentielle est strictement positive donc $f'(x)$ a le même signe que $1 - x$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f			

3. a. $f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$ donc T a pour équation $y = x$

3. b. À l'aide de la partie A, étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).

$$f(x) - x = x \left(\frac{1}{e^x - x} - 1 \right) = -x \frac{g(x)}{e^x - x}$$

g est positive sur $\mathbb{R}$ (nulle en 0), pour tout x , $(e^x - x)$ est strictement positif, donc $f(x) - x$ a le même signe que $-x$ donc :

si $x > 0$, $f(x) - x < 0$ donc C est en dessous de T sur $]0 ; +\infty[$

si $x < 0$, $f(x) - x > 0$ donc C est au dessus de T sur $] -\infty ; 0[$

si $x = 0$, $f(x) - x = 0$ donc O est le point de contact.

4. Tracer la droite (T), les asymptotes et la courbe (C).

