Métropole – La Réunion septembre 2016

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 3 pièces A, B et C ayant chacune un côté pile et un côté face.
Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé.
Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on retourne la pièce C.
Au début du jeu, les 3 pièces sont toutes du côté face.

1. Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face et 1 code le côté pile. Si a code un côté de la pièce A, alors $1-a$ code l'autre côté de la pièce A.

```
Variables :        a, b, c, d, s sont des entiers
                   i, n sont des entiers supérieurs ou égaux à 1
Initialisation :   a prend la valeur 0
                   b prend la valeur 0
                   c prend la valeur 0
                   Saisir n
Traitement :       Pour i allant de 1 à n faire
                   | d prend la valeur d'un entier aléatoire compris entre 1 et 6
                   | Si d ≤ 2
                   |   | alors a prend la valeur 1− a
                   |   | sinon Si d ≤ 4
                   |   |   | alors b prend la valeur 1− b
                   |   |   | sinon c prend la valeur 1− c
                   |   | FinSi
                   |   | FinSi
                   |   | s prend la valeur a + b + c
                   FinPour
Sortie :           Afficher s
```

a. On exécute cet algorithme en saisissant $n = 3$ et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour d sont 1 ; 4 et 2. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme :

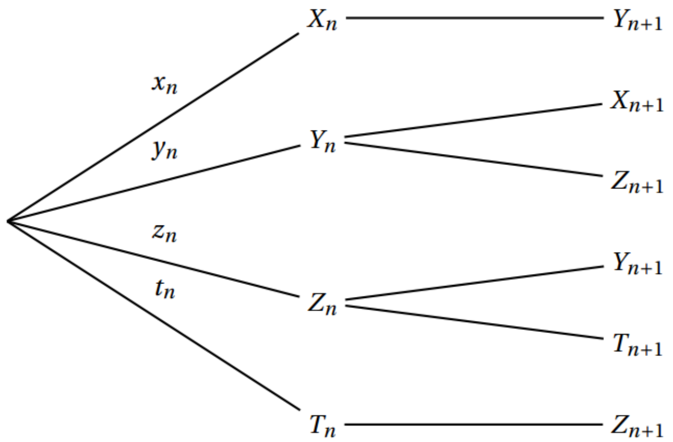
variables	i	d	a	b	c	s
initialisation	╳	╳				╳
1^{er} passage boucle Pour						
2^e passage boucle Pour						
3^e passage boucle Pour						

b. Cet algorithme permet-il de savoir si, après une exécution de n tirages, les trois pièces sont du côté pile ?

2. Pour tout entier naturel n, on note :
• X_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les trois pièces sont du côté face »
• Y_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, une seule pièce est du côté pile et les autres sont du côté face »
• Z_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, exactement deux pièces sont du côté pile et l'autre est du côté face »
• T_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les trois pièces sont du côté pile ».
De plus on note, $x_n = p(X_n)$; $y_n = p(Y_n)$; $_n = p(Z_n)$ et $t_n = p(T_n)$ les probabilités respectives des évènements X_n, Y_n, Z_n et T_n.

a. Donner les probabilités x_0, y_0, z_0 et t_0 respectives qu'au début du jeu il y ait 0, 1, 2 ou 3 pièces du côté pile.

b. Recopier l'arbre ci-dessous et compléter les probabilités sur ses branches :



3. Pour tout entier naturel n, on note U_n la matrice ligne $(x_n \quad y_n \quad z_n \quad t_n)$.

a. Donner la matrice U_0.

b. À l'aide de l'arbre précédemment rempli, déterminer la matrice carrée M telle que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = U_n \times M$.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $U_n = U_0 \times M^n$.

5. On admet que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$x_n = \frac{(-1)^n + 3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1}{8} \qquad y_n = \frac{-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n - (-1)^n\times 3 + 3}{8}$$

$$z_n = \frac{-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n + (-1)^n\times 3 + 3}{8} \qquad t_n = \frac{-(-1)^n + 3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1}{8}$$

a. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'au bout de 5 lancers de dés, une seule des trois pièces soit du côté pile.

b. Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte

• Première affirmation :
« À l'issue d'un nombre pair de lancers de dés, les pièces peuvent être toutes les trois du côté pile ».

• Deuxième affirmation :
« Au cours du jeu, la probabilité que les pièces soient toutes les trois du côté pile peut être supérieure ou égale à $\frac{1}{4}$. ».

• Troisième affirmation :
« Au cours du jeu, la probabilité que les pièces soient toutes les trois du côté pile peut être supérieure ou égale à 0,249 ».

CORRECTION

1. ***a.***

variables	i	*d*	*a*	*b*	*c*	*s*
initialisation			0	0	0	
1er passage boucle Pour		1	1	0	0	1
2 e passage boucle Pour		4	1	1	0	2
3 e passage boucle Pour		2	0	1	0	1

b. A chaque étape la variable *s* détermine le nombre de pièces se trouvant du côté pile.
L'algorithme permet donc de dite si, après *n* tirages, les trois pièces sont du côté pile.

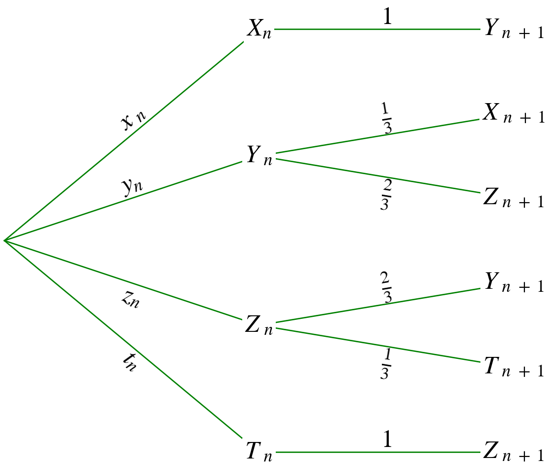
2. ***a.*** Au début du jeu, toutes les pièces sont du côté face, donc $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ et $t_0 = 0$

b. À l'issue de *n* lancers de dés, on a quatre cas :

α. les trois pièces sont du côté face donc au lancer suivant, une seule pièce est du côté pile et les autres sont du côté face donc $p_{X_n}(Y_{n+1}) = 1$, $p_{X_n}(X_{n+1}) = 0$, $p_{X_n}(Z_{n+1}) = 0$

β. une seule pièce est du côté pile et les autres sont du côté face alors au lancer suivant, soit on retourne la pièce qui est du côté pile et on a trois pièces sont du côté face $p_{Y_n}(X_{n+1}) = \frac{1}{3}$, soit on retourne une des deux pièces qui est du côté face, et on a alors exactement deux pièces sont du côté pile et l'autre est du côté face $p_{Y_n}(Z_{n+1}) = \frac{2}{3}$

χ. exactement deux pièces sont du côté pile et l'autre est du côté face alors au lancer suivant, soit on retourne la pièce qui est du côté face et on a trois pièces sont du côté pile $p_{Z_n}(T_{n+1}) = \frac{1}{3}$, soit on retourne une des deux pièces qui est du côté pile, et on a alors exactement deux pièces sont du côté face et l'autre est du côté pile $p_{Z_n}(Y_{n+1}) = \frac{2}{3}$.



δ. les trois pièces sont du côté pile donc au lancer suivant, une seule pièce est du côté face et les autres sont du côté pile donc $p_{T_n}(Z_{n+1}) = 1$.

3. ***a.*** $U_0 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$

b. D'après l'arbre de choix on a : $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{3} y_n \\ y_{n+1} = x_n + \frac{2}{3} z_n \\ z_{n+1} = \frac{2}{3} y_n + t_n \\ t_{n+1} = \frac{1}{3} z_n \end{cases}$ donc M = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. Initialisation, $M \neq O$ donc $M^0 = I_4$ donc $U_0 \times M^0 = U_0$, la propriété est initialisée.
Hérédité : montrons pour tout n de N que si $U_n = U_0 \times M^n$ alors $U_{n+1} = U_0 \times M^{n+1}$.
$U_{n+1} = U_n \times M$ or $U_n = U_0 \times M^n$ donc $U_{n+1} = U_0 \times M \times M^n = U_0 \times M^{n+1}$
La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier naturel n, $U_n = U_0 \times M^n$.

5. *a.* La probabilité qu'au bout de 5 lancers de dés, une seule des trois pièces soit du côté pile est y_5

$$y_5 = \frac{-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^5 + 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^5 - (-1)^5 \times 3 + 3}{8} = \frac{3\times\frac{1}{3^5} + 3\times\frac{1}{3^5} + 3 + 3}{8} = \frac{\frac{1}{3^4} + 3}{4} \text{ donc } y_5 \approx 0{,}753.$$

b. **Première affirmation fausse :**

$$t_n = \frac{-(-1)^n + 3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1}{8}$$ or si n est pair, $(-1)^n = 1$ et $\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ donc $t_n = 0$

Deuxième affirmation fausse :
Un entier n est soit pair soit impair.
Si n est pair $t_n = 0$, donc $t_n \leq \frac{1}{4}$

si n est impair $(-1)^n = -1$ et $\left(-\frac{1}{3}\right)^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$ donc $t_n = \dfrac{1 - 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1}{8} = \dfrac{1 - \frac{1}{3^{n-1}}}{4}$

$t_n = \frac{1}{4} - \dfrac{\frac{1}{3^{n-1}}}{4}$ donc si n est impair, $t_n \leq \frac{1}{4}$

• Troisième affirmation vraie :
A l'aide de la calculette, on remarque que $t_7 \approx 0{,}2496$ donc $t_7 \geq 0{,}249$

Sans calculatrice, $t_n \geq 0{,}249 \Leftrightarrow n$ est impair et $\frac{1}{4} - \dfrac{\frac{1}{3^{n-1}}}{4} \geq 0{,}249 \Leftrightarrow n$ est impair et $\frac{1}{4} - 0{,}249 \geq \dfrac{\frac{1}{3^{n-1}}}{4} \Leftrightarrow$

n est impair et $0{,}004 \geq \frac{1}{3^{n-1}} \Leftrightarrow 3^{n-1} \geq \frac{1}{0{,}004} \Leftrightarrow n$ est impair et $(n-1)\ln 3 \geq 250 \Leftrightarrow n$ est impair et $n - 1 \geq \frac{\ln 250}{\ln 3}$

$\Leftrightarrow n$ est impair et $n - 1 \geq 6 \Leftrightarrow n$ est impair et $n \geq 7$