On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3v_n}{5} \end{cases}$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n, $v_n > u_n$.
2. Montrer que la suite (w_n), définie par $w_n = v_n - u_n$ est géométrique.
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
4. Montrer que la suite (x_n), définie par $x_n = u_n + v_n$ est constante.
5. En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).
6. A partir de quel indice n a-t-on $| u_n - v_n | < 10^{-5}$.

CORRECTION

1. $u_0 = 2$ et $v_0 = 3$ donc $v_0 > u_0$

La propriété est vraie pour $n = 0$

Montrons que pour tout n la propriété est héréditaire. C'est-à-dire que si $v_n > u_n$ alors : $v_{n+1} > u_{n+1}$

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{2u_n + 3v_n}{5} - \frac{3u_n + 2v_n}{5} = \frac{2\ u_n + 3v_n - (3u_n + 2v_n)}{5}$$

$v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{v_n - u_n}{5}$ or $v_n > u_n$ donc $\dfrac{v_n - u_n}{5} > 0$ donc $v_{n+1} - u_{n+1} > 0$ donc $v_{n+1} > u_{n+1}$.

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

2. D'après la question précédente : $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{v_n - u_n}{5}$ donc $w_{n+1} = \dfrac{1}{5} w_n$ donc la suite (w_n) est géométrique de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 1$ et de raison $q = \dfrac{1}{5}$ donc $w_n = q^n\, w_0 = \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.

3. Pour montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, il faut montrer que (u_n) est croissante, (v_n) décroissante et que la limite de $v_n - u_n$ est 0.

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} - u_n = \dfrac{2}{5}(v_n - u_n)$ or pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_n > 0$ donc $v_n - u_n > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ donc (u_n) est croissante.

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{2u_n + 3v_n}{5} - v_n = -\dfrac{2}{5}(v_n - u_n)$ or pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n - u_n > 0$ donc $v_{n+1} - v_n < 0$ donc (v_n) est décroissante.

si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ ici $q = \dfrac{1}{5}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{5}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$

Les trois conditions sont vérifiées donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Donc ces deux suites convergent vers la même limite L.

4. Pour tout n de $\mathbb{N}$: $x_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1}$ donc $x_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3v_n}{5} + \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} = \dfrac{2\ u_n + 3v_n + (3u_n + 2v_n)}{5}$

$x_{n+1} = u_n + v_n$ donc pour tout n de $\mathbb{N}$: $x_{n+1} = x_n$

(x_n) est une suite constante et $x_n = x_0 = u_0 + v_0 = 5$.

5. Les suites (u_n) et (v_n) convergent vers le même limite L et $x_n = u_n + v_n = 5$ donc (x_n) converge vers 2 L et 2 L = 5 donc L = 2,5.

6. $w_n = v_n - u_n$ et $w_n > 0$ donc $| u_n - v_n | = v_n - u_n = \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$

Pour que $| u_n - v_n | < 10^{-5}$, il suffit que $\left(\dfrac{1}{5}\right)^n < 10^{-5}$

or la suite $\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$ est strictement décroissante et $\left(\dfrac{1}{5}\right)^8 < 10^{-5}$ donc pour tout $n \geq 8$, $\left(\dfrac{1}{5}\right)^n < \left(\dfrac{1}{5}\right)^8 < 10^{-5}$

donc à partir de 8, on a $| u_n - v_n | < 10^{-5}$.