Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) (unité graphique : 2 cm).

On considère les points A, B et C d' affixes respectives : $z_A = -\dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $z_B = \overline{z_A}$ et $z_C = -3$.

Partie A

1. Écrire les nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.

2. Placer les points A, B et C.

3. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

Partie B

Soit *f* l'application qui, à tout point M du plan d'affixe *z*, associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{1}{3}\,i\,z^2$.

On note O', A', B' et C' les points respectivement associés par *f* aux points O, A, B et C.

1. *a.* Déterminer la forme exponentielle des affixes des points A', B' et C'.

b. Placer les points A', B' et C'.

c. Démontrer l'alignement des points O, A et B' ainsi que celui des points O, B et A'.

2. Soit G l'isobarycentre des points O, A, B et C. On note G' le point associé à G par *f* .

a. Déterminer les affixes des points G et G′ .

b. Le point G' est-il l'isobarycentre des points O', A', B' et C' ?

3. Démontrer que si M appartient à la droite (AB) alors M' appartient à la parabole d'équation $y = -\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{3}{4}$.

(On ne demande pas de tracer cette parabole)

CORRECTION

Partie A

1. $|z_A|^2 = \dfrac{9}{4} + \dfrac{3}{4} = 3$ donc $|z_A| = \sqrt{3}$

$z_A = \sqrt{3}(\cos\theta + i\sin\theta)$ donc $\sqrt{3}\cos\theta = -\dfrac{3}{2}$ et $\sqrt{3}\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ soit $\begin{cases}\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta = \dfrac{1}{2}\end{cases}$ donc $\theta = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

$z_A = \sqrt{3}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$; $z_B = \overline{z_A}$ donc $z_B = \sqrt{3}\,e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

2. voir à la fin de l'exercice

3. $AB^2 = \left(-\dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3$; $AC^2 = \left(-\dfrac{3}{2} + 3\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 0\right)^2 = \dfrac{9}{4} + \dfrac{3}{4} = 3$

$BC^2 = \left(-\dfrac{3}{2} + 3\right)^2 + \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 0\right)^2 = \dfrac{9}{4} + \dfrac{3}{4} = 3$ donc AB = AC = BC le triangle ABC est équilatéral.

Partie B

1. *a.* Déterminer la forme exponentielle des affixes des points A', B' et C'.

$a' = \dfrac{1}{3}\,i\,z_A^2 = \dfrac{1}{3}\,e^{i\frac{\pi}{2}} \times \left(\sqrt{3}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^2 = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{10\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{13\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{6}}$;

$b' = \dfrac{1}{3}\,i\,z_B^2 = \dfrac{1}{3}\,e^{i\frac{\pi}{2}} \times \left(\sqrt{3}\,e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right)^2 = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{10\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{-7\pi}{6}} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$c' = \dfrac{1}{3}\,i\,z_C^2 = \dfrac{1}{3}\,e^{i\frac{\pi}{2}} \times 9 = 3\,e^{i\frac{\pi}{2}}$

b. voir à la fin de l'exercice

c. $z_A = \sqrt{3}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et $b' = e^{i\frac{-5\pi}{6}}$

$(\overrightarrow{OB'} ; \overrightarrow{OA}) = (\vec{u} ; \overrightarrow{OA}) - (\vec{u} ; \overrightarrow{OB'})$ or $(\vec{u} ; \overrightarrow{OA}) = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$ et $(\vec{u} ; \overrightarrow{OB'}) = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$ donc $(\overrightarrow{OB'} ; \overrightarrow{OA}) = 0 + 2k\pi$

Les points O, A, B' sont alignés.

De même, $z_B = \sqrt{3}\,e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ et $a' = e^{i\frac{\pi}{6}}$

$(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OA'}) = (\vec{u}\,;\overrightarrow{OA'}) - (\vec{u}\,;\overrightarrow{OB})$ or $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OA'}) = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OB}) = -\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$ donc $(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OA'}) = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$

soit $(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OA'}) = \pi + 2k\pi$ donc les points O, B, A' sont alignés.

2. *a.* G a pour affixe $g = \dfrac{1}{4}(z_O + z_A + z_B + z_C) = -\dfrac{3}{2}$

G' a pour affixe $g' = \dfrac{1}{3}\,\mathrm{i}\,z_G^{\,2} = \dfrac{1}{3}\,\mathrm{i} \times \dfrac{9}{4} = \dfrac{3}{4}\,\mathrm{i}$

b. L'isobarycentre H des points O', A', B' et C' pour affixe $h = \dfrac{1}{4}(z_{O'} + z_{A'} + z_{B'} + z_{C'}) = \dfrac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} + 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\right)$

soit $h = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{1}{2} + 3\,\mathrm{i}\right) = \mathrm{i}$ donc H ≠ G', G' n'est pas l'isobarycentre des points O', A', B' et C'.

3. La droite (AB) a pour équation $x = -\dfrac{3}{2}$ donc si M appartient à (AB) il a pour affixe $z = -\dfrac{3}{2} + \mathrm{i}\,y$

M' a pour affixe $z' = \dfrac{1}{3}\,\mathrm{i}\left(-\dfrac{3}{2} + \mathrm{i}\,y\right)^2 = \dfrac{1}{3}\,\mathrm{i}\left(\dfrac{9}{4} - y^2 - 3\,y\,\mathrm{i}\right) = y + \dfrac{1}{3}\,\mathrm{i}\left(\dfrac{9}{4} - y^2\right)$ donc si $z' = x' + \mathrm{i}\,y'$ avec x' et y' réels

alors $x' = y$ et $y' = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{9}{4} - y^2\right)$ soit $y' = -\dfrac{1}{3}x'^2 + \dfrac{3}{4}$. donc M' appartient à la parabole d'équation $y = -\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{3}{4}$.