Asie Juin 2014

Exercice 1 (4 points) Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples comportant quatre questions indépendantes. Pour chaque question, une seule des quatre affirmations proposées est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à l'affirmation exacte. Aucune justification n'est demandée. Chaque réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fautive ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormal, on considère les points $A(1; -1; -1)$, $B(1; 1; 1)$, $C(0; 3; 1)$ et le plan P d'équation $2x + y - z + 5 = 0$.

Question 1

Soit D_1 la droite de vecteur directeur $\vec{u}(2; -1; 1)$ passant par A .

Une représentation paramétrique de la droite D_1 est :

$$a. \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 - t \end{cases} \quad b. \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + t \end{cases} \quad c. \begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = -3 - 2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad d. \begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = -2 + t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 - 4t \end{cases}$$

Question 2

Soit D_2 la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 - t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 - 2t \end{cases}$

- a. La droite D_2 et le plan P ne sont pas sécants.
b. La droite D_2 est incluse dans le plan P .
c. La droite D_2 et le plan P se coupent au point $E\left(\frac{1}{3}; -\frac{7}{3}; \frac{10}{3}\right)$.
d. La droite D_2 et le plan P se coupent au point $F\left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{22}{3}\right)$.

Question 3

- a. L'intersection du plan P et du plan (ABC) est réduite à un point.
b. Le plan P et le plan (ABC) sont confondus.
c. Le plan P coupe le plan (ABC) selon une droite.
d. Le plan P et le plan (ABC) sont strictement parallèles.

Question 4

Une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie au dixième de degré est égale à :

- a. $22,2^\circ$ b. $0,4^\circ$ c. $67,8^\circ$ d. $1,2^\circ$

Exercice 2 (6 points) Commun à tous les candidats

Le taux d'hématocrite est le pourcentage du volume de globules rouges par rapport au volume total du sang. On note X la variable aléatoire donnant le taux d'hématocrite d'un adulte choisi au hasard dans la population française. On admet que cette variable suit une loi normale de moyenne $45,5$ et d'écart-type σ .

Partie 1.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 45,5}{\sigma}$$

On note Z la variable aléatoire

1. a. Quelle est la loi de la variable aléatoire Z ?
b. Déterminer $P(X \leq \mu)$.
2. En prenant $\sigma = 3,8$, déterminer $P(37,9 \leq X \leq 55,3)$. Arrondir la valeur au centième.

Partie B

Une certaine maladie V est présente dans la population française avec la fréquence 1% . On sait d'autre part que 30% de la population française a plus de 50 ans, et que 90% des porteurs de la maladie V dans la population française ont plus de 50 ans.

On choisit au hasard un individu dans la population française.

On note α l'unique réel tel que $P(X \leq \alpha) = 0,995$, où X est la variable aléatoire définie au début de l'exercice. On ne cherchera pas à calculer α .

On définit les événements :

M : « l'individu est porteur de la maladie V »

S : « l'individu a plus de 50 ans »

H : « l'individu a un taux d'hématocrite supérieur à α ».

Ainsi $P(M) = 0,01$, $P_M(S) = 0,9$ et $P(H) = P(X > \alpha)$.

D'autre part, une étude statistique a révélé que 60% des individus ayant un taux d'hématocrite supérieur à α sont porteurs de la maladie V .

1. a. Déterminer $P(M \cap S)$

b. On choisit au hasard un individu ayant plus de 50 ans. Montrer que la probabilité qu'il soit porteur de la maladie V est égale à 0,03.

2. a. Calculer la probabilité $P(H)$.

b. L'individu choisi au hasard a un taux d'hématocrite inférieur ou égal à α . Calculer la probabilité qu'il soit porteur de la maladie V. Arrondir au millième.

Partie C

Le but de cette partie est d'étudier l'influence d'un gène sur la maladie V.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de la maladie V dans les échantillons de taille 1000. prélevés au hasard et avec remise dans l'ensemble de la population française. On arrondira les bornes de l'intervalle au millième,

2. Dans un échantillon aléatoire de 1000 personnes possédant le gène. on a trouvé 14 personnes porteuses de la maladie V. Au regard de ce résultat, peut-on décider, au seuil de 95 %, que le gène a une influence sur la maladie ?

Exercice 3 (5 points) Commun à tous les candidats

Une chaîne, suspendue entre deux Points d'accroche de même hauteur, peut être modélisée par la représentation graphique d'une

fonction g définie sur $[-1; 1]$ par $g(x) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$ où a est un paramètre réel strictement positif. On ne cherchera pas à étudier la

fonction g .

On montre en sciences physiques que, pour que cette chaîne ait une tension minimale aux extrémités, il faut et il suffit que le réel a soit une solution strictement positive de l'équation $(x-1)e^{2x} - 1 - x = 0$.

Dans la suite, on définit sur $[0; +\infty[$ la fonction f par $f(x) = (x-1)e^{2x} - 1 - x$ pour tout réel $x \geq 0$.

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f .

Vérifier que $f'(0) = -2$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$.

2. On note f'' la fonction dérivée de f' . Vérifier que, pour tout réel $x \geq 0$, $f''(x) = 4xe^{2x}$.

3. Montrer que, sur l'intervalle $[0; +\infty[$, la fonction f' s'annule pour une unique valeur, notée x_0 .

4. a. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$, puis montrer que $f(x)$ est négatif pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; x_0]$.

b. Calculer $f(2)$.

En déduire que, sur l'intervalle $[x_0; +\infty[$, la fonction f s'annule pour une unique valeur.

Si l'on note a cette valeur, déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur de a arrondie au centième.

5. On admet sans démonstration que la longueur L de la chaîne est donnée par l'expression : $L = \int_0^1 (e^{ax} + e^{-ax}) dx$

Calculer la longueur de la chaîne ayant une tension minimale aux extrémités, en prenant 1,2 comme valeur approchée du nombre a .

Exercice 3 (5 points) candidats ayant choisi la spécialité mathématiques

Partie A

Le but de cette partie est de démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini, en raisonnant par l'absurde.

1. On suppose qu'il existe un nombre fini n de nombres premiers. notés $p_1, p_2, \dots, p_n$. On considère le nombre E produit de tous les nombres premiers augmenté de 1 :

$$E = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n + 1$$

Démontrer que E est un entier supérieur ou égal à 2, et que E est premier avec chacun des nombres $p_1, p_2, \dots, p_n$.

2. En utilisant le fait que E admet un diviseur premier, conclure.

Partie B

Pour tout entier naturel $k \geq 2$, on pose $M_k = 2^k - 1$. On dit que M_k est le k -ième nombre de Mersenne.

1. a. Reproduire et compléter le tableau suivant, qui donne quelques valeurs de M_k .

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M_k	3								

b. D'après k tableau précédent, si k est un nombre premier, peut-on conjecturer que le nombre M_k est premier?

2. Soient p et q deux entiers naturels non nuls.

a. Justifier l'égalité : $1 + 2^p + (2^p)^2 + \dots + (2^p)^{q-1} = \frac{2^{pq} - 1}{2^p - 1}$

b. En déduire que $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$.

c. En déduire que, si un entier k supérieur ou égal à 2 n'est pas premier, alors M_k ne l'est pas non plus.

3. a. Prouver que le nombre de Mersenne M_{11} n'est pas premier.

b. Que peut-on en déduire concernant la conjecture de la question 1. b. ?

Partie C

Le test de Lucas-Lehmer permet de déterminer si un nombre de Mersenne donné est premier. Ce test utilise la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2$$

Si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, le test permet d'affirmer que le nombre M_n est premier si et seulement si $u_{n-2} \equiv 0$ modulo M_n . Cette propriété est admise dans la suite.

Utiliser le test de Lucas-Lehmer pour vérifier que le nombre de Mersenne M_5 est premier.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

$$AB = \sqrt{8} \text{ et } AC = \sqrt{21} \text{ donc } \cos \widehat{BAC} = \frac{12}{\sqrt{8} \times \sqrt{21}} \text{ donc } \widehat{BAC} \approx 22,2^\circ$$

Exercice 2

Partie 1

1. a. La variable aléatoire Z correspond au changement de variable $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ donc suit la loi normale centrée réduite.
 b. $P(X \leq \mu) = P(Z \leq 0) = 0,5$
2. $P(37,9 \leq X \leq 53,1) \approx 0,95$

Partie B

1. a. $P_M(S) = 0,9$ et $P(M) = 0,01$ or $P_M(S) = \frac{P(S \cap M)}{P(M)}$ donc $P(M \cap S) = P_M(S) \times P(M) = 0,9 \times 0,01$ donc $P(M \cap S) = 0,009$

b. $P_S(M) = \frac{P(S \cap M)}{P(S)} = \frac{0,009}{0,3} = 0,03$

2. a. $P(H) = P(X > \alpha) = 1 - P(X \leq \alpha) = 1 - 0,995 = 0,005$

b. On veut donc calculer : $P_{\bar{H}}(M) = \frac{P(\bar{H} \cap M)}{P(\bar{H})}$

$$P(\bar{H}) = 1 - P(H) = 1 - 0,005 = 0,995$$

Il faut déterminer $P(\bar{H} \cap M)$, pour cela utiliser la formule des probabilités totales : $P(M) = P(H \cap M) + P(\bar{H} \cap M)$

$$P(H \cap M) = P_{\bar{H}}(M) \times P(H) = 0,6 \times 0,005 = 0,003 \text{ donc } 0,01 = 0,003 + P(\bar{H} \cap M) \text{ donc } P(\bar{H} \cap M) = 0,007$$

$$P_{\bar{H}}(M) = \frac{P(\bar{H} \cap M)}{P(\bar{H})} = \frac{0,007}{0,995} \approx 0,007$$

Partie C

$n = 1000$ donc $n \geq 30$, $np = 1000 \times 0,01 = 10$ donc $np \geq 5$ et $n(1-p) = 990$ donc $n(1-p) \geq 5$, les conditions sont vérifiées.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est donc : $I = \left[0,01 - 1,96 \sqrt{\frac{0,01 \times 0,99}{1000}} ; 0,01 + 1,96 \sqrt{\frac{0,01 \times 0,99}{1000}} \right]$.

Règle de décision : si pour un échantillon de taille 1000,

$f \in I$ on ne peut pas dire que le gène a une influence sur la maladie.

$f \notin I$, on peut dire que le gène a une influence sur la maladie.

La fréquence observée est $f = \frac{141}{1000}$ soit 0,141 donc $f \notin I$ donc on ne peut pas dire que le gène a une influence sur la maladie.

Exercice 3

1. Soit $\begin{cases} u(x) = x-1 & u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{2x} & v'(x) = 2e^{2x} \end{cases}$ donc $f'(x) = e^{2x} + 2(x-1)e^{2x} - 1 = (2x-1)e^{2x} - 1$
 $f'(0) = -1 - 1 = -2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-1) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty.$$

2. Soit $\begin{cases} u(x) = 2x-1 & u'(x) = 2 \\ v(x) = e^{2x} & v'(x) = 2e^{2x} \end{cases}$ donc $f''(x) = 2e^{2x} + 2(2x-1)e^{2x} = 4xe^{2x}$.

3. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc, pour tout $x > 0$ on a $f''(x) > 0$ et $f''(0) = 0$.

La fonction est f' est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, $f'(0) = -1 - 1 = -2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ $0 \in]-2 ; +\infty[$ donc, l'équation $f'(x) = 0$ possède une unique solution x_0 sur $[0 ; +\infty[$.

4. a.

x	0	x_0	$+\infty$
$f''(x)$	0	+	

f'	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

- sur $[0 ; x_0]$, $f'(x) \leq 0$ donc f est décroissante
- sur $[x_0 ; +\infty[$, $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante

$f(0) = -2$, or f est décroissante sur $[0 ; x_0]$ donc pour tout x de $[0 ; x_0]$, $f(x) < 0$.

b. $f(2) = e^4 - 3$ donc $f(2) > 0$

Sur l'intervalle $[x_0 ; +\infty[$, f est continue et strictement croissante, $f(x_0) < 0$ et $f(2) > 0$ donc $0 \in [f(x_0) ; f(2)]$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution α sur $[x_0 ; +\infty[$.

D'après la question précédente, on sait que, pour tout x de $[0 ; x_0]$, $f(x) < 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ ne possède qu'une seule solution sur $\mathbb{R}^{*+}$.

$f(1,19) < 0$ et $f(1,20) > 0$ donc $1,19 \leq \alpha \leq 1,20$ donc $\alpha \approx 1,20$ par excès

5.
$$L = \int_0^1 (e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}) dx = \left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \right]_0^1$$
 donc $I = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{\alpha}$, $\alpha \approx 1,20$ donc $L \approx \frac{e^{1,2} - e^{-1,2}}{1,2}$ soit $L \approx 2,52$

Exercice 4

Partie A

1. Le plus petit nombre premier est 2 donc $E \geq 2 + 1 \geq 2$

$E - p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n = 1$, il existe donc deux entiers u et v tels que $uE + vp_1 = 1$ avec $1 \leq i \leq n$

D'après le théorème de Bézout, E est premier avec p_i pour $1 \leq i \leq n$

E est donc premier avec chacun des nombres $p_1, p_2, \dots, p_n$.

2. E n'est divisible par aucun nombre premier donc E est un nombre premier différent de tous les p_i , ce qui est contraire à l'hypothèse faite.

L'ensemble des nombres premiers est donc infini.

Partie B

1. a.

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M_k	3	7	15	31	63	127	255	511	1023

b. D'après le tableau, si k est premier (2, 3, 5 et 7), M_k l'est aussi. Si k est composé (non premier) M_k est composé. La conjecture est donc qu'il y a une équivalence entre k est premier et M_k premier.

2. a. La somme $1 + 2^p + (2^p)^2 + \dots + (2^p)^{q-1}$ à la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme égal à 1 et de raison $b = 2^p$.

si $b \neq 1$ alors $1 + b + b^2 + \dots + b^{q-1} = \frac{b^q - 1}{b - 1}$. On a donc : $1 + 2^p + (2^p)^2 + \dots + (2^p)^{q-1} = \frac{(2^p)^q - 1}{2^p - 1}$

b. $1 + 2^p + (2^p)^2 + \dots + (2^p)^{q-1} = \frac{(2^p)^q - 1}{2^p - 1}$ donc $1 + 2^p + (2^p)^2 + \dots + (2^p)^{q-1} = \frac{2^{pq} - 1}{2^p - 1}$

$2^{pq} - 1 = [1 + 2^p + (2^p)^2 + \dots + (2^p)^{q-1}] \times [2^p - 1]$

$2^{pq} - 1$ est le produit de deux termes dont l'un est $2^p - 1$, il est donc divisible par ce nombre.

c. Si k est un entier supérieur ou égal à 2 non premier alors il existe 2 entiers p et q différents de 1 tels que $k = p \cdot q$.

Par conséquent $M_k = 2^k - 1 = 2^{pq} - 1$ donc M_k est divisible par $2^p - 1$ d'après la question précédente.

Pour montrer que M_k est premier, il faut de plus vérifier que $2^p - 1 \neq 1$ et $2^p - 1 \neq M_k$

$p \geq 2$ donc $2^p - 1 \geq 2^2 - 1 = 3$ donc $2^p - 1 \neq 1$

$2^p - 1 \neq M_k \Leftrightarrow 2^{pq} - 1 = 2^p - 1 \Leftrightarrow p = pq \Leftrightarrow p = 0$ ou $q = 1$ ce qui est exclu donc M_k admet un diviseur autre que 1 et lui-même donc M_k n'est pas premier.

a. $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$ donc M_{11} n'est donc pas premier.

b. On a trouvé un nombre premier k pour lequel M_k n'est pas premier. La conjecture est donc fautive.

Partie C

$M_5 = 31$, $n = 5$ donc $n - 2 = 3$

n	0	1	2	3
u_n	4	14	194	37 634

$u_3 = 37634$ donc $u_3 = 31 \times 1214$ donc $u_3 \equiv 0 \pmod{M_5}$.

Le test de Lucas-Lehmer fonctionne pour M_5 .

Variables :	u, M, n et i sont des entiers naturels.
Initialisation :	u prend la valeur 4
Traitement :	Demander un entier $n \geq 3$ M prend la valeur $2^n - 1$ Pour i allant de 1 à $n - 2$ faire u prend la valeur $u^2 - 2$ Fin Pour Si M divise u alors afficher « M est un nombre premier » sinon afficher « M n'est pas un nombre premier » FinSi