Soit I l'intervalle [0. 1]. On considère la fonction f définie sur I par $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+4}$

1. Etudier les variations de f et en déduire que, pour tout x élément de I, $f(x)$ appartient à I.

2. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n+2}{u_n+4}$

   Montrer que, pour tout n, u_n appartient à I.
   On se propose d'étudier la suite (u_n) par deux méthodes différentes.

Première méthode

3. *a.* Représenter graphiquement la droite Δ d'équation $y = x$ et la courbe représentative de f dans un repère orthonormal d'unité graphique 10 cm.
b. En utilisant le graphique précédent, placer les points A_0 ; A_1, A_2 et A_3 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0 ; u_1; u_2 et u_3.
Que suggère le graphique concernant le sens de variation de (u_n) et sa convergence ?

c. Etablir la relation $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$ et en déduire le sens de variation de la suite (u_n).

d. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
e. Prouver que la limite L de la suite (u_n) vérifie $L = f(L)$ et calculer L.

Deuxième méthode

On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

4. *a.* Prouver que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$.
   b. Calculer v_0 et exprimer v_n fonction de n.
   c. Exprimer u_n en fonction de v_n ; puis en fonction de n.
   d. En déduire la convergence de la suite (u_n) et sa limite.

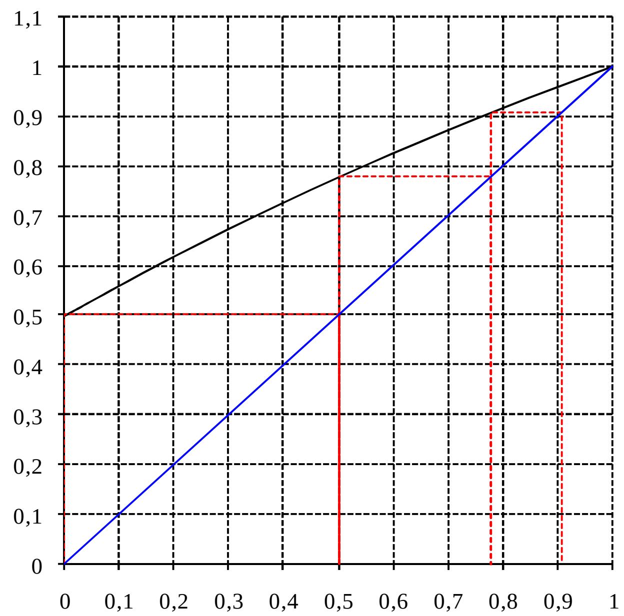
CORRECTION

1. f est définie dérivable sur [0 ; 1], $f'(x) = \dfrac{10}{(x+4)^2}$ donc $f'(x) > 0$ donc f est croissante sur [0 ; 1]

Pour tout x de [0 ; 1], $f(0) \le f(x) \le f(1)$ donc $\dfrac{1}{2} \le f(x) \le 1$ donc pour tout x de [0 ; 1], $f(x) \in [0\ ;\ 1]$

2. La propriété est vraie pour $n = 0$
Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$ la propriété est héréditaire c'est-à-dire que pour tout n, si $u_n \in$ I alors $u_{n+1} \in$ I
$u_n \in$ I donc d'après la question 1, $f(u_n) \in$ I or $u_{n+1} = f(u_n)$ donc $u_{n+1} \in$ I
La propriété est héréditaire pour $n + 1$ donc vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

<u>Première méthode</u>



3. *a. b.* A_0 a pour coordonnées $(u_0\ ;\ 0)$
Soit B_1 le point de la courbe représentative de f d'abscisse u_0
B_1 a pour ordonnée $y = f(u_0) = u_1$

Soit C_1 le point de la droite d'équation $y = x$ d'ordonnée u_1,
C_1 appartient à la droite d'équation $y = x$ donc a pour abscisse $x = u_1$
Soit A_1 le point d'abscisse u_1 d'ordonnée u_1
On construit de même $B_2\, C_2$, A_2 puis $B_3\, C_3$, A_3

Apparemment la suite semble strictement croissante et paraît converger vers 1.

c. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3u_n+2}{u_n+4} - u_n = \dfrac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n+4}$

or $(1 - u_n)(u_n + 2) = -u_n^2 - u_n + 2$

donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$

or $0 \le u_n \le 1$ donc $\dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4} > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$. La suite (u_n) est strictement croissante.

d. La suite (u_n) est strictement croissante et majorée par 1 donc est convergente.

e. La fonction f est définie continue sur I, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_n \in$ I, (u_n) est convergente donc sa limite L appartient à [0 ; 1] et est solution de l'équation $f(x) = x$.

$\dfrac{3x+2}{x+4} = x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -2$

L $\in$ [0 ; 1] donc L = 1. La suite converge vers 1.

Deuxième méthode

4. *a.* $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \dfrac{\dfrac{3u_n+2}{u_n+4}-1}{\dfrac{3u_n+2}{u_n+4}+2} = \dfrac{2u_n-2}{5u_n+10}$ donc $v_{n+1} = \dfrac{2}{5}\,\dfrac{u_n-1}{u_n+2} = \dfrac{2}{5}v_n$

(v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$.

b. $v_0 = \dfrac{u_0-1}{u_0+2} = -\dfrac{1}{2}$ donc $v_n = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$

c. $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+2} \Leftrightarrow v_n(u_n+2) = u_n - 1 \Leftrightarrow u_n(1-v_n) = 2v_n + 1 \Leftrightarrow u_n = \dfrac{1+2v_n}{1-v_n} \Leftrightarrow u_n = \dfrac{1-0{,}4^n}{1+0{,}5\times 0{,}4^n}$

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}4^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$