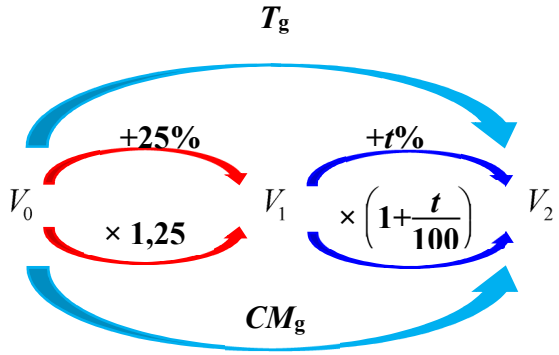
Exercice 1

Dans chacune des situations suivantes, déterminer la valeur de t.

1. Le chiffre des ventes d'un magazine a augmenté de 25 % puis diminué de t%. Globalement il a augmenté de 16%.



D'après l'énoncé, on a : $1{,}16 = CM_g$

D'autre part, on sait que $CM_g = 1{,}25 \times \left(1+\frac{t}{100}\right)$

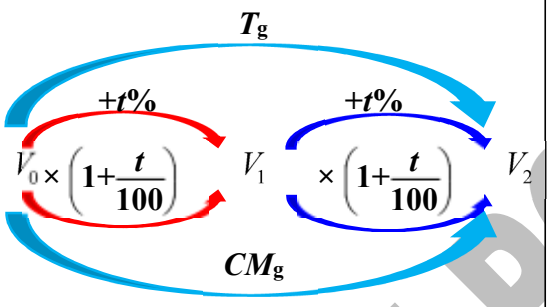
donc $1+\frac{t}{100} = \frac{CM_g}{1{,}25} = \frac{1{,}16}{1{,}25}$

d'où $\frac{t}{100} = \frac{1{,}16}{1{,}25} - 1$ soit $t = 100 \times \left(\frac{1{,}16}{1{,}25} - 1\right) = -7{,}2$

Conclusion : on trouve $t = -7{,}2$

En d'autres termes, une hausse de 25 % suivie d'une baisse de 7,2 % équivalent à une hausse de 16 %.

2. Après deux hausses successives de t%, le nombre d'abonnés sur un réseau social a globalement augmenté de 96 %.



D'après l'énoncé, on a : $1{,}96 = CM_g$

D'autre part, on sait que $CM_g = \left(1+\frac{t}{100}\right) \times \left(1+\frac{t}{100}\right)$

donc $\left(1+\frac{t}{100}\right)^2 = 1{,}96$ (**) d'où $1+\frac{t}{100} = \sqrt{1{,}96}$ ou $1+\frac{t}{100} = -\sqrt{1{,}96}$

$\frac{t}{100} = \sqrt{1{,}96} - 1$ ou $\frac{t}{100} = -\sqrt{1{,}96} - 1$

Puis $t = 100\,(\sqrt{1{,}96} - 1)$ ou $t = 100 \times (-\sqrt{1{,}96} - 1)$

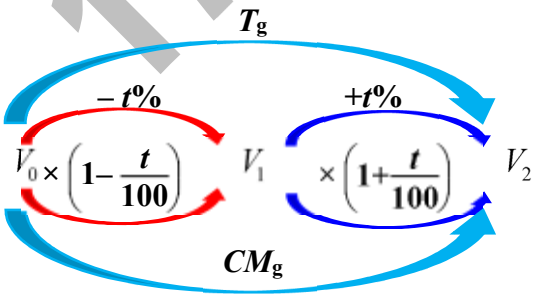
Enfin $t = 40$ ou $t = -280$

Conclusion : On rejette la solution négative étant donné que si l'on avait deux baisses successives, on ne pourrait avoir une hausse à la fin, donc on ne gardera que : $t = 40$.

En d'autres termes, deux hausses successives de 40 % équivalent à une hausse de 96 %.

(**) : Pour a réel positif, l'équation $X^2 = a$ équivaut à $X = \sqrt{a}$ ou $X = -\sqrt{a}$

3. Suite à un régime, le poids de Teva a baissé de t %, puis il a augmenté de t %. Globalement il a perdu 9 % de son poids initial.



D'après l'énoncé, on a : $0{,}91 = CM_g$

D'autre part, on sait que $CM_g = \left(1-\frac{t}{100}\right) \times \left(1+\frac{t}{100}\right)$

donc $1-\frac{t^2}{100^2} = 0{,}91$ d'où $\frac{t^2}{100^2} = 1 - 0{,}91 = 0{,}09$

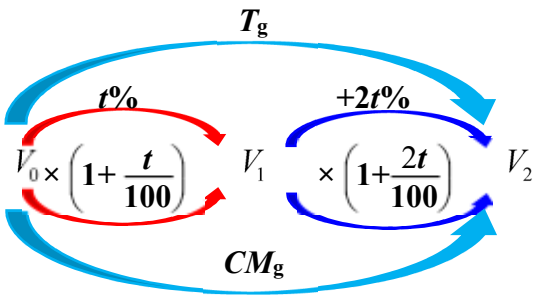
soit $t^2 = 100^2 \times 0{,}09$ ou encore $t^2 = 900$

Enfin $t = \sqrt{900} = 30$ ou $t = -\sqrt{900} = -30$.

Conclusion : on peut garder les deux valeurs.

En d'autres termes, une baisse de 30 % suivie d'une hausse de 30 % équivalent à une baisse de 9 %. Mais aussi, une hausse de 30 % suivie d'une baisse de 30% équivalent à une baisse de 9 %.

4. Le prix d'une action en bourse a augmenté de t% puis de $2t$ % durant la même journée. A la clôture, son prix a globalement été multiplié par 1,32.



D'après l'énoncé, on a : $1{,}32 = CM_g$

D'autre part, on sait que $CM_g = \left(1+\frac{t}{100}\right)\times\left(1+\frac{2t}{100}\right)$

donc $1+\frac{2t}{100}+\frac{t}{100}+2\frac{t^2}{100^2} = 1{,}32$

d'où $2\frac{t^2}{100^2}+3\frac{t}{100}-0{,}32=0$

ou encore $2t^2+300t-3200=0$ (on multiplie tout par 100^2)

On a une équation du 2nd degré : $\Delta = 300^2 - 4(2)(-3200) = 115\,600$

Il y a 2 solutions : $t_1 = \frac{-300-\sqrt{115\,600}}{4} = -160$ et $t_2 = \frac{-300+\sqrt{115\,600}}{4} = 10$.

Conclusion : on ne peut garder que la valeur positive ce qui correspond à une hausse. Si on avait eu deux baisses successives, on ne pourrait avoir une hausse.
En d'autres termes, une hausse de 10 % suivie d'une hausse de 20 % équivalent à une hausse de 32 %.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $[-2;3]$ par : $f(x) = -x^2+x+2$ et la fonction g définie sur $[-2;3]$ par $g(x) = -x+2$.

1. ***a.*** Montrer que pour tout réel x, $f(x) = -(x-\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4}$.

Pour tout réel x, $-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4} = -(x^2-x+\frac{1}{4})+\frac{9}{4} = -x^2+x-\frac{1}{4}+\frac{9}{4} = -x^2+x+\frac{8}{4} = -x^2+x+2 = f(x)$

b. En déduire le tableau de variation de f. On justifiera avec soin la réponse.

D'après la question précédente, on a la forme canonique de f (sous la forme $a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $a=-1$, $\alpha=\frac{1}{2}$ et $\beta=\frac{9}{4}$). Comme $a<0$, la parabole représentant f est orientée vers le bas, et comme $\alpha=\frac{1}{2}$, on en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty;\frac{1}{2}]$ puis strictement décroissante sur $[\frac{1}{2};+\infty[$.

On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f		↗	$\frac{9}{4}$	↘	

2. Dresser en justifiant les résultats le tableau de variation de la fonction g.
g est une fonction affine (de la forme $ax+b$ avec $a=-1$ et $b=2$). Comme $a<0$, alors la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ d'où le tableau de variation suivant :

17-18_LPG_1ES

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
g	↘

3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de chaque courbe avec l'axe des ordonnées.

- Avec l'axe des ordonnées :

$g(0) = 2$ donc la droite représentant g rencontre l'axe des ordonnées au point A de coordonnées (0 ;2)
$f(0) = 2$ donc la parabole représentant f rencontre l'axe des ordonnées au même point A.

4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de chaque courbe avec l'axe des abscisses.

Avec l'axe des abscisses :
$g(x) = 0$ équivaut à $-x+2 = 0$ d'où $x = 2$
Conclusion : la droite représentant g rencontre l'axe des abscisses au point B de coordonnées (2 ;0)

$f(x) = 0$
$\Delta = (1)^2 - 4(-1)(2) = 9$

On en déduit que f admet 2 racines : $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{9}}{-2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{9}}{-2} = -1$

Conclusion : la parabole représentant f rencontre l'axe des abscisses aux points C (– 1 ;0) et B(2 ;0)

5. Tracer les courbes des fonctions f et g dans un même repère d'unité 2 cm sur chaque axe.

Pour tracer soigneusement une courbe, on place plusieurs points. Pour cela on dresse un tableau de valeurs :

Pour représenter la fonction f :

x	– 2	– 1,5	– 1	– 0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	– 4	–1,75	0	1,25	2	2,25	2	1,25	0	–1,75	–4

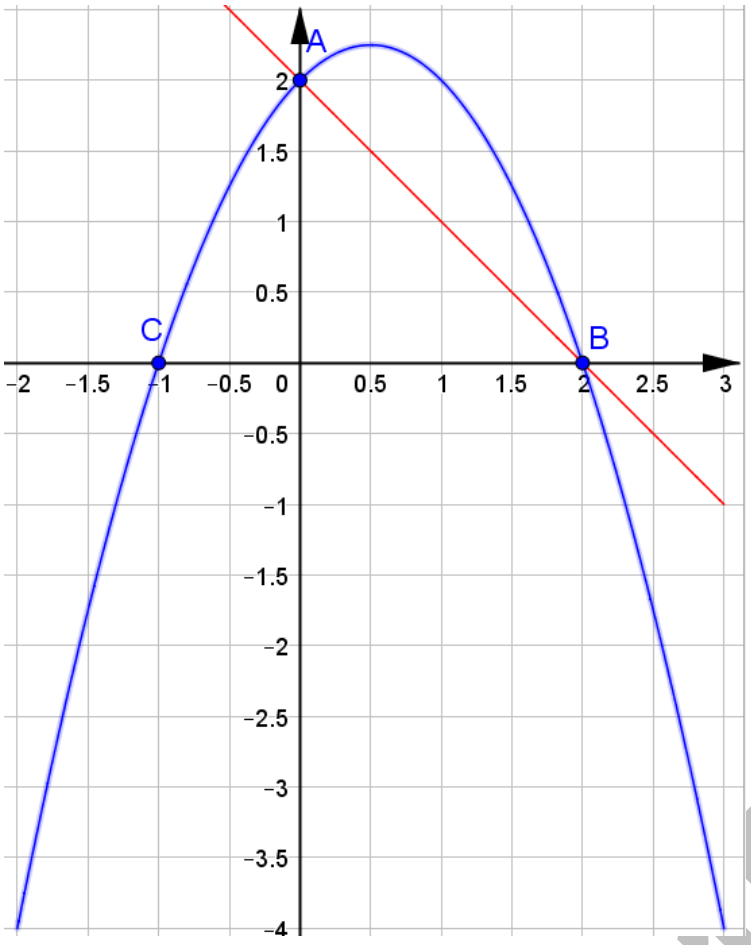
Pour représenter la fonction g :

x	– 2	3
$g(x)$	0	–1

G étant une fonction affine, sa représentation graphique est une droite, il suffit de placer deux points de cette droite, ce qui explique qu'il n'est pas nécessaire de chercher plus de 2 points.

Cela dit, que cela ne vous empêche pas de chercher un ou deux points de plus , ne serait-ce que pour la précision du tracé et aussi pour s'assurer de ne pas faire d'erreurs, dans la mesure où les trois ou quatre points placés doivent être alignés.

17-18_LPG_1ES2_DM2 c



6. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.

METHODE : Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points communs entre la courbe représentant f et celle représentant g. En d'autres termes, ici il s'agit de lire les abscisses des points communs de la parabole et de la droite.

Par lecture graphique, les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les réels 0 et 2.

(Les 2 points communs sont A et B et ils ont respectivement pour abscisse 0 et 2, d'où la réponse).

7. Résoudre algébriquement l'équation $f(x) = g(x)$ et comparer avec les résultats de la question précédente.

$f(x) = g(x)$ équivaut à $-x^2 + x + 2 = -x + 2$ ou encore à $-x^2 + 2x = 0$

On a une équation du second degré. Il n'est pas utile de chercher le discriminant …

Ici, $-x^2 + 2x = 0$ équivaut à $x(-x + 2) = 0$ (c'est une équation- produit)

D'où : $x = 0$ ou $x = 2$

Conclusion : On retrouve bien par le calcul, les valeurs 0 et 2.

Rappel :

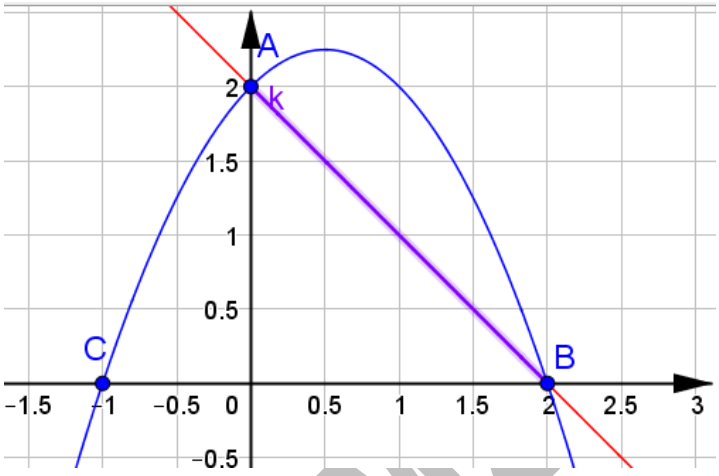
$a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$

8. Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x) \leq f(x)$ puis retrouver les résultats par le calcul.

17-18_LPG_1ES2_DM2 c

METHODE : Pour déterminer graphiquement les solutions de l'inéquation $g(x) \leq f(x)$

1. On commence par repérer la (ou les parties) de la courbe représentant la fonction g située(s) en dessous de celle(s) représentant la fonction f.
2. Ensuite, il ne reste plus qu'à lire les abscisses des points correspondants.



Voir ci-contre (partie en mauve).

Graphiquement l'inéquation $g(x) \leq f(x)$ admet pour solution l'ensemble des réels x de l'intervalle $[0\ ;2]$

Par le calcul :

$g(x) \leq f(x) \Leftrightarrow -x+2 \leq -x^2+x+2 \Leftrightarrow x^2-2x \leq 0 \Leftrightarrow x(x-2) \leq 0$

On est amené à résoudre une inéquation du 2nd degré ($x^2-2x \leq 0$).

Les solutions de l'équation $x^2-2x=0$ sont 0 et 2. La parabole représentant la fonction $x : \mapsto x^2-2x$ est orientée vers le haut (le coefficient de x^2 est 1 qui est positif), et elle coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisse respective 0 et 2.

Du coup, on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signe de x^2-2x		$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion : $g(x) \leq f(x)$ pour $x \in [0\ ;2]$

17-18_LPG_1ES2_DM

Exercice 3

X est une variable aléatoire prenant les valeurs -2, -1, 0 et 10.
On sait que :

- $P(X=-2)=P(X=10)$; $P(X=-1)=\frac{1}{2}P(X=0)$ et $P(X=-2)=3\,P(X=-1)$.

Quelle est la loi de probabilité de X ?

D'après l'énoncé, l'ensemble des valeurs prises par X est $\{-2\ ;-1\ ;0\ ;10\}$

D'après le cours, on sait que : $P(X=-2)+P(X=-1)+P(X=0)+P(X=10)=1$

Notons $x = P(X=-2)$

D'après l'énoncé, $P(X=10)=x$;

Comme $3\,P(X=-1) = P(X=-2)$ alors $P(X=-1)=\frac{1}{3}P(X=-2)=\frac{1}{3}x$

Et comme $P(X=-1)=\frac{1}{2}P(X=0)$ alors $P(X=0)=2\,P(X=-1)=2\times\frac{1}{3}x$

En reprenant l'égalité : $P(X=-2)+P(X=-1)+P(X=0)+P(X=10)=1$

On obtient : $x+\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}x+x=1$ soit $3x=1$ d'où $x=\frac{1}{3}$

Finalement : $P(X=-2)=P(X=10)=\frac{1}{3}$; $P(X=-1)=\frac{1}{3}x=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ et $P(X=0)=\frac{2}{3}x=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

Conclusion : La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant

x_i	-2	-1	0	10
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$

On a bien $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{3}=1$

Exercice 4

On lance deux dés tétraédriques non truquées dont les faces sont numérotées 1 à 4.
On note :
S la variable aléatoire égale à la somme des points obtenus sur la face du dessous.
M la variable aléatoire égale au plus grand des deux numéros obtenus.
Donner la loi de probabilité de *S* et de *M* puis déterminer leur espérance mathématique.

On peut représenter l'ensemble des issues liées à l'expérience à l'aide du tableau suivant puis préciser pour chacune des issues la valeur prise par *S* (**en bleu**)

Dé n° 2 / Dé n° 1	**1**	**2**	**3**	**4**
1	(1 ; 1) **2**	(1 ;2) **3**	(1 ; 3) **4**	(1 ; 4) **5**
2	(2 ; 1) **3**	(2 ; 2) **4**	(2 ; 3) **5**	(2 ; 4) **6**
3	(3 ; 1) **4**	(3 ; 2) **5**	(3 ; 3) **6**	(3 ; 4) **7**
4	(4 ; 1) **5**	(4 ; 2) **6**	(4 ; 3) **7**	(4 ; 4) **8**

L'univers **Ω** contient 16 issues toutes équiprobables. Une issue est modélisée par un couple (***i*** ;***j***) où *i* et *j* sont des entiers compris entre 1 et 4. ***i*** désignant le résultat obtenu avec le dé n° 1 et ***j*** celui obtenu avec le dé n° 2.
L'ensemble des valeur prises par S est l'ensemble {2 ;3 ;4 ;5 ;6 ;7 ;8}

La loi de *S* est donnée par le tableau suivant :

s_i	2	3	4	5	6	7	8	On a bien :
$P(S=s_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}+\frac{2}{16}+\frac{3}{16}+\frac{4}{16}+\frac{3}{16}+\frac{2}{16}+\frac{1}{16}=1$

17-18_LPG_1ES2_DM2 c

L'espérance E(S) de la variable aléatoire S vérifie :

$$E(S)= 2 \times \frac{1}{16} + 3 \times \frac{2}{16} + 4 \times \frac{3}{16} + 5 \times \frac{4}{16} + 6 \times \frac{3}{16} + 7 \times \frac{2}{16} + 8 \times \frac{1}{16} = \frac{80}{16} = 5$$

Interprétation : Sur un grand nombre d'expériences, en moyenne on peut espérer obtenir une somme égale à 5 par expériences.

On peut représenter l'ensemble des issues liées à l'expérience à l'aide du tableau suivant puis préciser pour chacune des issues la valeur prise par M (**en bleu**)

Dé n° 2 / Dé n° 1	1	2	3	4
1	(1 ; 1) 1	(1 ;2) 2	(1 ; 3) 3	(1 ; 4) 4
2	(2 ; 1) 2	(2 ; 2) 2	(2 ; 3) 3	(2 ; 4) 4
3	(3 ; 1) 3	(3 ; 2) 3	(3 ; 3) 3	(3 ; 4) 4
4	(4 ; 1) 4	(4 ; 2) 4	(4 ; 3) 4	(4 ; 4) 4

L'univers Ω contient 16 issues toutes équiprobables. Une issue est modélisée par un couple (***i*** ;***j***) où i et j sont des entiers compris entre 1 et 4. ***i*** désignant le résultat obtenu avec le dé n° 1 et ***j*** celui obtenu avec le dé n° 2. L'ensemble des valeur prises par M est l'ensemble {1 ;2 ;3 ;4}

La loi de M est donnée par le tableau suivant :

m_i	1	2	3	4	
$P(M = m_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	On a bien : $\frac{1}{16}+\frac{3}{16}+\frac{5}{16}+\frac{7}{16} = 1$

L'espérance E(M) de la variable aléatoire M vérifie : $E(M)= 1 \times \frac{1}{16} + 2 \times \frac{3}{16} + 3 \times \frac{5}{16} + 4 \times \frac{7}{16} = \frac{50}{16} = 3{,}125$

17-18_LPG_1ES2_DM2 c