

ANTILLES-GUYANE SEPTEMBRE 2006

Dans un cube ABCDEFGH, on désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [GH]. K désigne le centre de la face BCGF. Les calculs seront effectués dans le repère orthonormal (A ; AB, AD, AE).

1. a. Démontrer que le quadrilatère DIFJ est un parallélogramme.

Établir que DIFJ est en fait un losange et montrer que l'aire de ce losange est égale à $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

b. Vérifier que le vecteur $n(2; 1; -1)$ est un vecteur normal au plan (DIJ). En déduire une équation cartésienne de ce plan.

c. Déterminer la distance du point E au plan (DIJ), puis calculer le volume de la pyramide EDIFJ.

On rappelle que le volume V d'une pyramide de hauteur h et de base correspondante B est donné par la formule suivante :

$$V = \frac{1}{3} h \times B$$

2. Soit (Δ) la droite passant par E et orthogonale au plan (DIJ)

a. Donner une représentation paramétrique de (Δ) et prouver que K est un point de (Δ).

b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection L de (Δ) et du plan (DIJ).

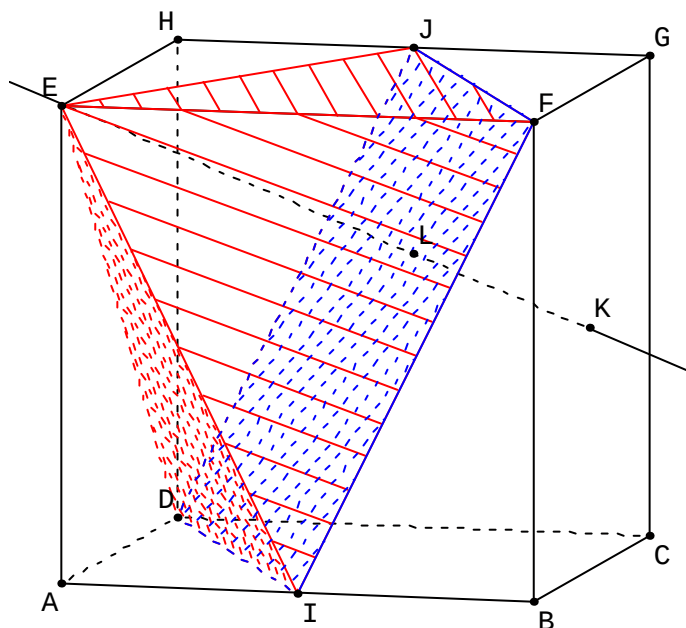
c. Vérifier que L est le centre de gravité du triangle BEG.

3. Soit (S) l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - z + \frac{4}{3} = 0.$$

a. Vérifier que (S) est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

b. Montrer que L est un point de (S), Quelle propriété géométrique relative à (S) et au plan (DIJ) peut-on déduire de ce dernier résultat ?



CORRECTION

1. a. $DI = DA + AI = \frac{1}{2} AB - AD$

$JF = JG + GF$ or $JG = \frac{1}{2} HG = \frac{1}{2} AB$ donc $JF = \frac{1}{2} AB - AD$

$JF = DI$ donc le quadrilatère DIFJ est un parallélogramme.

Pour montrer que le parallélogramme est un losange, il suffit de montrer qu'il a deux côtés consécutifs de même longueur. Dans le triangle rectangle ADI : $DI^2 = AD^2 + AI^2$

$$DI^2 = AD^2 + \frac{1}{4} AB^2 = \frac{5}{4} AD^2$$

Dans le triangle rectangle DHJ : $DJ^2 = DH^2 + HJ^2$

$$DJ^2 = DH^2 + \frac{1}{4} HG^2 = \frac{5}{4} AD^2 \text{ puisque } DH = HG = AD$$

donc $DJ = DI$, le parallélogramme DIFJ a deux côtés consécutifs de même longueur donc est un losange.

b. Pour vérifier que n est un vecteur normal au plan (DIJ) il suffit de montrer qu'il est orthogonal aux vecteurs non colinéaires DI et DJ.

D a pour coordonnées $(0; 1; 0)$, I $(\frac{1}{2}; 0; 0)$ et J $(\frac{1}{2}; 1; 1)$ donc DI a pour coordonnées $(\frac{1}{2}; -1; 0)$ et DJ $(\frac{1}{2}; 0; 1)$

$$n \cdot DI = 2 \times \frac{1}{2} + (-1) \times 1 + 0 \times (-1) = 1 - 1 = 0 \text{ et}$$

$$n \cdot DJ = 2 \times \frac{1}{2} + 1 \times 0 + 1 \times (-1) = 1 - 1 = 0 \text{ donc } n(2; 1; -1) \text{ est un vecteur normal au plan (DIJ).}$$

Une équation cartésienne du plan (DIJ) est $2x + y - z + d = 0$,

$D \in (DIJ)$ donc $2 \times 0 + 1 - 0 + d = 0$ soit $d = -1$ donc une équation cartésienne du plan (DIJ) est $2x + y - z - 1 = 0$

c. Soit δ la distance du point E au plan (DIJ), $\delta = \frac{|2 \times 0 + 0 - 1 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$

L'aire du losange DIFJ est égale à $A = \frac{1}{2} DF \times IJ$

D a pour coordonnées (0 ; 1 ; 0), F (1 ; 0 ; 1) donc $DF^2 = 1 + 1 + 1$

$DF^2 = 3$ donc $DF = \sqrt{3}$

I $\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$ et J $\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right)$ donc $IJ^2 = 0 + 1^2 + 1^2 = 2$ donc $IJ = \sqrt{2}$

$A = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ or $V = \frac{1}{3} \times A \times \delta$ donc $V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{1}{3}$.

2. a. (Δ) est la droite orthogonale au plan (DIJ) donc a pour vecteur directeur n donc $M \in (\Delta) \Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{R}$, tel que $EM = k n$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 0 = 2k \\ y - 0 = k \\ z - 1 = -k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k \\ y = k \\ z = -k + 1 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

$AK = AB + \frac{1}{2} BC + \frac{1}{2} BF \Leftrightarrow AK = AB + \frac{1}{2} AD + \frac{1}{2} AE$ donc K a pour coordonnées $\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Le point de (Δ) de paramètre $k = \frac{1}{2}$, a pour coordonnées $\begin{cases} x = 2 \times \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{2} + 1 \end{cases}$ soit $\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ donc $K \in (\Delta)$.

b. L appartient à (Δ) donc a des coordonnées de la forme $\begin{cases} x = 2k \\ y = k \\ z = -k + 1 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$

L appartient au plan (DIJ) donc ses coordonnées vérifient : $2x + y - z - 1 = 0$ donc $2 \times 2k + k - (-k + 1) - 1 = 0$

soit $6k - 2 = 0$ donc $k = \frac{1}{3}$ donc L a pour coordonnées $\begin{cases} x = 2 \times \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = -\frac{1}{3} + 1 \end{cases}$ donc L $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

c. Soit L' le centre de gravité du triangle BEG donc $L'B + L'E + L'G = 0$ donc :

$L'A + AB + L'A + AC + L'A + AG = 0$ soit $3AL' = AB + AE + AG$

AB a pour coordonnées (1 ; 0 ; 0) ; AE a pour coordonnées (0 ; 0 ; 1) ; AG a pour coordonnées (1 ; 1 ; 1)

donc $3AL'$ a pour coordonnées (2 ; 1 ; 2) donc AL' a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ donc $L' = L$

L est le centre de gravité du triangle BEG.

3. a. (S) a pour équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - z + \frac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - y + z^2 - z + \frac{4}{3} = 0$.

$(x-1)^2 - 1 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{6} = 0$

Soit $KM^2 = \frac{5}{6}$ donc (S) est la sphère de centre K de rayon $\frac{1}{\sqrt{6}}$

b. $KL^2 = \left(\frac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow KL^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$ Donc $KL = \frac{1}{\sqrt{6}}$ donc L est un point de (S).

La droite $(\Delta) = (KL)$ est un rayon de la sphère et est perpendiculaire au plan (DIJ) en L ; L appartient à ce plan donc la sphère est tangente au plan (DIJ) en L.