Les cinq questions sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou si elle est fausse en justifiant la réponse.
Un point sera attribué pour chaque réponse correctement justifiée. Aucun point ne sera attribué à une réponse non justifiée.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1. L'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z - 1 + 2i| = |z + 3 - 4i|$ est une droite passant par le point H d'affixe 5 + 5 i.
2. On note A, B et C les points d'affixes respectives 2 − i, 1 + i et 3 − 2 i.

L'image du point B par l'homothétie de centre A et de rapport − 2 est le point C.

3. Soit f la transformation complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe z′ telle que $z' = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)z$.

L'image d'une droite d du plan par la transformation f est une droite qui est perpendiculaire à la droite d.

Pour les questions suivantes, l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

4. Soit P le plan d'équation $3x + y - 7 = 0$ et D la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 3t, \ t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$

La droite D est parallèle au plan P.

5. Soient P le plan d'équation $x + 3y - 4z + 1 = 0$ et A le point de coordonnées (1 ; 4 ; − 1).

La sphère S de centre A et de rayon 4 est sécante au plan P.

CORRECTION

1. **Affirmation vraie**

Soit A le point d'affixe $a = 1 - 2i$ et B le point d'affixe $b = -3 + 4i$ alors

$|z - 1 + 2i| = |z + 3 - 4i| \Leftrightarrow |z - a| = |z - b| \Leftrightarrow$ MA = MB

L'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z - 1 + 2i| = |z + 3 - 4i|$ est la médiatrice de [AB]

Si $z = 5 + 5i$: $|z - 1 + 2i| = |5 + 5i - 1 + 2i| = |4 + 7i| = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}$

$|z + 3 - 4i| = |5 + 5i + 3 - 4i| = |8 + i| = \sqrt{8^2 + 1^2} = \sqrt{65}$ donc si $z = 5 + 5i$, $|z - 1 + 2i| = |z + 3 - 4i|$

H appartient à la médiatrice de [AB].

2. **Affirmation fausse**

$\overrightarrow{AC}$ a pour affixe $3 - 2i - (2 - i) = 1 + 3i$ et $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $1 + i - (2 - i) = -1 + 2i$

$\overrightarrow{AC} \neq -2\overrightarrow{AB}$ donc l'image du point B par l'homothétie de centre A et de rapport − 2 n'est pas le point C.

3. **Affirmation fausse**

$$z' = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)z = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z = e^{i\frac{3\pi}{4}} z$$

f est la rotation de centre O d'angle $\frac{3\pi}{4}$ donc f transforme toute droite d du plan en une droite faisant un angle de $\frac{3\pi}{4}$ avec d.

Autre solution

Soit A le point d'affixe 1, la droite (OA) est l'axe des réels. (OA) est transformée par f en la droite (OA') où A' = f(A).

A' a pour affixe $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$. A' n'appartient pas à l'axe des imaginaires purs donc la droite (OA) n'est pas transformée par f en une droite perpendiculaire.

4. **Affirmation vraie**

Un vecteur normal au plan P est le vecteur $\vec{n}(3 ; 1 ; 0)$

Un vecteur directeur de la droite D est le vecteur $\vec{u}(-1 ; 3 ; 1)$ donc $\vec{n} . \vec{u} = 3 \times (-1) + 1 \times 3 + 0 \times 1 = 0$

donc $\vec{u}$ est orthogonale à $\vec{n}$. La droite D est parallèle au plan P.

Autre solution : rechercher les points d'intersection de D et de P.

Soit M un point de D, M a pour coordonnées $(2 - t ; 1 + 3t ; t)$

M appartient à D si et seulement si $3x + y - 7 = 0 \Leftrightarrow 3(2 - t) + 1 + 3t - 7 = 0 \Leftrightarrow 6 - 3t + 1 + 3t - 7 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$

Tout point M de D appartient à P donc D est contenue dans P donc la droite D est parallèle au plan P.

5. **Affirmation vraie**

La sphère S de centre A et de rayon 4 est sécante au plan P si et seulement si la distance du centre de la sphère au plan P est inférieure au rayon de la sphère donc à 4.

$d(A ; P) = \frac{|1 + 3 \times 4 - 4 \times (-1) + 1|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 4^2}} = \frac{18}{\sqrt{26}}$ or $d < 4$ donc La sphère S de centre A et de rayon 4 est sécante au plan P