# ASIE MARS 2001

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$ , $\vec{v}$ ).

On appelle $f$ l'application qui, à tout point M d'affixe $z$ associe le point M' d'affixe $z'$ telle que $z' = \dfrac{-\,\mathrm{i}\,z - 2}{z + 1}$.

Soient A , B et C les points d'affixes respectives $a = -1$ , $b = 2\,\mathrm{i}$ et $c = -\,\mathrm{i}$.

1. Soit C ' l'image du point C par $f$ . Donner l'affixe $c'$ du point C ' sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

2. Calculer l'affixe $d$ du point D ayant pour image par $f$ le point D ' d'affixe $d' = \dfrac{1}{2}$.

3. Pour tout nombre complexe $z$ différent de – 1 , on note $p$ le module de $z + 1$ (c'est-à-dire $|z + 1| = p$) et $p'$ le module de $z' + \mathrm{i}$ (c'est-à-dire $|z' + \mathrm{i}| = p'$).

*a*. Démontrer que, pour tout nombre complexe $z$ différent de – 1 , on a $p\,p' = \sqrt{5}$ .

*b*. Si le point M appartient au cercle ($\Gamma$) de centre A et de rayon 2, montrer qu'alors M ' = $f$ (M) appartient à un cercle ($\Gamma'$) , dont on précisera le centre et le rayon.

4. Pour tout nombre complexe $z$ différent de – 1 , on considère le nombre complexe $\omega = \dfrac{z - 2\,\mathrm{i}}{z + 1}$.

*a*. Interpréter géométriquement l'argument du nombre complexe $\omega$.
*b*. Montrer que $z' = -\,\mathrm{i}\,\omega$.
*c*. Déterminer l'ensemble (F) des points M d'affixe $z$ telle que $z'$ soit un réel non nul.
*d*. Vérifier que le point D appartient aux ensembles ($\Gamma$) et (F).

5. Représenter les ensembles ($\Gamma$) , (F) et ($\Gamma'$) en prenant 4 cm pour unité graphique.

## CORRECTION

1. On remplace $z$ par – i :

$$c' = \frac{-i\,(-i) - 2}{(-i) + 1} = \frac{-1-2}{1-i} \Leftrightarrow c' = \frac{-3\,(1+i)}{(1-i)\,(1+i)} \Leftrightarrow c' = \frac{-3\,(1+i)}{2} = \frac{-3}{2}(1 + \mathrm{i})$$

$$|c'| = \left|\frac{-3}{2}\right| \times |1 + \mathrm{i}| \Leftrightarrow |c'| = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

donc $c' = \dfrac{3}{2}\sqrt{2}\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = \dfrac{-3}{2}(1 + \mathrm{i})$ donc $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

or $\cos\dfrac{\pi}{4} = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\cos\theta = -\cos\dfrac{\pi}{4}$ et $\sin\theta = -\sin\dfrac{\pi}{4}$ donc $\theta = \pi + \dfrac{\pi}{4} + 2\,k\,\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$ ).

donc $c' = \dfrac{3}{2}\sqrt{2}\,(\cos\dfrac{5\,\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{5\,\pi}{4})$

2. Il faut chercher $z$ tel que $\dfrac{-i\,z-2}{z+1} = \dfrac{1}{2}$ donc $2\,(-\mathrm{i}\,z - 2) = z + 1$ soit $z\,(1 + 2\,\mathrm{i}) = -5$

$z = \dfrac{-5}{1+2\,i}$ et $z = \dfrac{-5\,(1-2\,i)}{(1+2\,i)\,(1-2\,i)} \Leftrightarrow z = \dfrac{-5\,(1-2\,i)}{1^2+2^2} = \dfrac{-5\,(1-2\,i)}{5} \Leftrightarrow z = -1 + 2\,\mathrm{i}$ donc D a pour affixe $-1 + 2\,\mathrm{i}$

3. *a*. $p' = |z' + \mathrm{i}|$ or $z' + \mathrm{i} = \dfrac{-i\,z-2}{z+1} + \mathrm{i} = \dfrac{-i\,z-2+i\,(z+1)}{z+1}$

$z' + \mathrm{i} = \dfrac{-i\,z-2+i\,z+i}{z+1} \Leftrightarrow z' + \mathrm{i} = \dfrac{-2+i}{z+1}$ donc $|z' + \mathrm{i}| = \dfrac{|-2+i|}{|z+1|}$ or $|-2 + \mathrm{i}| = \sqrt{5}$

$|z' + \mathrm{i}| = \dfrac{\sqrt{5}}{|z+1|}$ donc $|z' + \mathrm{i}| \times |z + 1| = \sqrt{5}$ soit $p\,p' = \sqrt{5}$

*b*. le point M appartient au cercle ($\Gamma$) de centre A et de rayon 2, donc AM = 2 soit $|z - (-1)| = 2$
donc $|z + 1| = 2$ or $|z' + \mathrm{i}| \times |z + 1| = \sqrt{5}$ donc $2\,|z' + \mathrm{i}| = \sqrt{5}$

donc $2\,|z' - c| = \sqrt{5}$ donc $CM' = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ donc M' appartient au cercle de centre C de rayon $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

4. *a*. $\omega = \dfrac{z_M - z_B}{z_M - z_A} = \dfrac{z_B - z_M}{z_A - z_M} = \dfrac{z_{\overrightarrow{MB}}}{z_{\overrightarrow{MA}}}$ donc arg $\omega$ est une mesure de l'angle ( $\overrightarrow{MA}$ ; $\overrightarrow{MB}$ ).

*b.* $i^2 = -1$ donc $-i\,\omega = -i\,\dfrac{z-2i}{z+1} = \dfrac{-iz+2}{z+1}$ donc $z' = -i\,\omega$.

*c.* $z'$ est un réel non nul $\Leftrightarrow \arg z' = 0 + 2k\pi$ ou $\arg z' = \pi + 2k\pi$

or $z' = -i\,\omega$ donc $\arg z' = \arg(-i) + \arg\omega$ $\arg z' = -\dfrac{\pi}{2} + \arg\omega$

$z'$ est un réel non nul $\Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2} + \arg\omega = 0 + 2k\pi$ ou $-\dfrac{\pi}{2} + \arg\omega = \pi + 2k\pi$

$z'$ est un réel non nul $\Leftrightarrow \arg\omega = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $\arg\omega = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$z'$ est un réel non nul $\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}) = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$z'$ est un réel non nul $\Leftrightarrow$ le triangle AMB est rectangle en M avec M $\neq$ A ($z' \neq 0$) et M $\neq$ B ($z'$ existe donc $z + 1 \neq 0$)

**Propriété : ABC est un triangle rectangle en A si et seulement si le sommet de l'angle droit A appartient au cercle de diamètre l'hypoténuse [BC].**

le triangle AMB est rectangle en M avec M $\neq$ A ($z' \neq 0$) et M $\neq$ B $\Leftrightarrow$ M appartient au cercle de diamètre [AB] privé de {A , B}.
donc (F) est le cercle de diamètre [AB] privé de {A , B}.

*d.* si $z = d = -1 + 2i$ alors $z' = d' = \dfrac{1}{2}$ donc on est bien dans le cas où $z'$ est réel donc D $\in$ (F).

AM = $|z_D - z_A| = |d + 1| = |2i| = 2$ donc D $\in$ ($\Gamma$)

5. Il faut tracer le cercle ($\Gamma$) de centre A passant par D, le cercle (F) de diamètre [AB] privé de {A , B}, passant par D et le cercle ($\Gamma'$) de centre C de rayon $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ passant par D'.