Antilles Guyane juin 2016

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
On note C l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z-2| = 1$.

1. Justifier que C est un cercle, dont on précisera le centre et le rayon.

2. Soit a un nombre réel. On appelle D la droite d'équation $y = a\,x$.
Déterminer le nombre de points d'intersection entre C et D en fonction des valeurs du réel a.

CORRECTION

1. Soit A le point d'affixe 2, $|z-2| = \text{MA}$
$|z-2| = 1 \Leftrightarrow \text{MA} = 1 \Leftrightarrow$ M décrit le cercle, de centre A et de rayon 1.

2. Si $M \in D$ alors $z = x + i\,a\,x$ donc $|z-2| = |x - 2 + i\,a\,x|$

$M \in C$ donc $|z-2| = 1$ soit $(x-2)^2 + a^2 x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2(1+a^2) - 4x + 4 - 1 = 0$
Soit l'équation du second degré : $x^2(1+a^2) - 4x + 3 = 0$
$\Delta = 4^2 - 4(1+a^2) \times 3 = 16 - 12 - 12\,a^2 = 4 - 12\,a^2$
$\Delta = 4(1 - 3\,a^2)$
$\Delta = 0 \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\Leftrightarrow$ dans chacun des deux cas $C \cap D$ est réduit à deux points confondus
$\Delta < 0 \Leftrightarrow a \in \left]-\frac{\sqrt{3}}{3} ; \frac{\sqrt{3}}{3}\right[\Leftrightarrow C \cap D = \varnothing$
$\Delta > 0 \Leftrightarrow a \in \left]-\infty ; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{3}}{3} ; +\infty\right[$ $\Leftrightarrow$ le cercle et la droite ont deux points en commun.