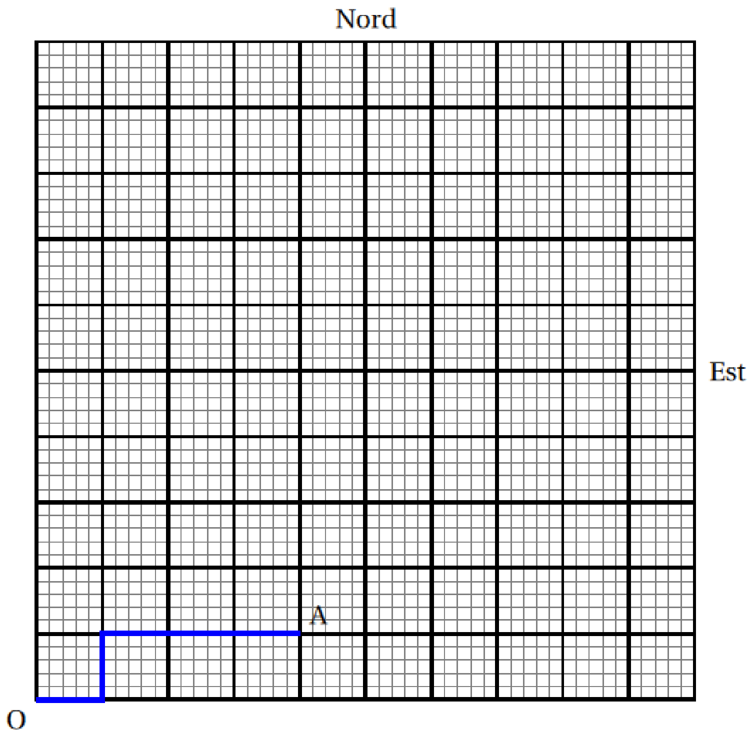
Les rues d'une ville nouvelle sont structurées de telle sorte que les pâtés de maisons sont des carrés superposables et les rues sont toutes parallèles ou perpendiculaires.
On identifie le plan de la ville au quadrillage d'un carré de 10 unités sur 10 dans lequel on se repère avec des points à coordonnées entières qui correspondent aux carrefours :



Le point O a pour coordonnées (0 ; 0), le point A a pour coordonnées (4 ; 1).
On s'intéresse aux chemins partant de O et arrivant à un autre point M de coordonnées (p ; q) où p et q sont des entiers naturels tels que $p \leq 10$ et $q \leq 10$.

À chaque intersection, on ne peut aller que vers le nord (N) ou vers l'est (E).

Dans tout l'exercice, on décrit un chemin à l'aide d'un mot composé successivement des lettres N ou E qui indiquent dans l'ordre la direction à suivre à chaque intersection.
On appelle *longueur* d'un chemin le nombre de lettres employées pour le décrire.
Par exemple : Pour se rendre en A, on peut suivre par exemple les chemins NEEEE ou ENEEE (marqué en gras sur la figure) ; ces deux chemins ont une longueur égale à 5.
Les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Partie A - Dénombrement

1. Donner la liste de tous les chemins permettant de se rendre en A.

2. Soit M un point de coordonnées (p ; q) où p et q sont des entiers naturels tels que $p \leq 10$ et $q \leq 10$.
Exprimer, en fonction de p et q, la longueur des chemins qui permettent d'arriver en M.

3. Montrer qu'il y a $\begin{pmatrix} p+q \\ p \end{pmatrix}$ chemins différents qui permettent d'arriver en M.

4. Dénombrer les chemins pour arriver au point C de coordonnées (7 ; 5).

5. Dénombrer les chemins pour arriver en C en passant par A.

Partie B - Étude d'une variable aléatoire

Tous les chemins considérés dans la suite de l'exercice vérifient les deux propriétés suivantes :

- ils sont de longueur 5 ;
- un promeneur part de O et à chaque intersection la probabilité qu'il aille vers le Nord est de $\frac{2}{3}$ (et donc de $\frac{1}{3}$ vers l'Est), indépendamment de son choix précédent.

On appelle X la variable aléatoire qui à tout chemin suivi par le promeneur associe le nombre de fois où il va vers le Nord.

1. Énumérer, en donnant la liste de leurs coordonnées, tous les points sur lesquels peut aboutir un chemin.

2. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

3. Calculer la probabilité que le promeneur arrive en A.

CORRECTION

Partie A - Dénombrement

1. La liste de tous les chemins permettant de se rendre en A est :

NEEEE ; ENEEE ; EENEE ; EEENE ; EEEEN

2. Pour aller de O à M il faut effectuer p trajets vers le Nord et q trajets vers l'Est donc la longueur des chemins qui permettent d'arriver en M est $p + q$

3. Pour dénombrer les chemins, il faut choisir parmi les $p + q$ déplacements (soit vers le Nord soit vers l'Est) l'ordre des p déplacements vers le Nord donc il y a $\binom{p+q}{p}$ chemins différents qui permettent d'arriver en M.

4. Il y a $\binom{p+q}{p}$ chemins différents qui permettent d'arriver en M.

donc il y a $\binom{12}{7} = 792$ chemins différents qui permettent d'arriver en C.

5. Il faut aller de O à A, il y a donc 5 chemins différents qui permettent d'arriver en A.

Pour aller de A à C, le nombre de chemins sera le même que pour aller de O à B (3 ; 4) il y a donc $\binom{7}{3} = 35$ chemins possibles pour aller de A à C donc il y a $5 \times 35 = 175$ chemins pour arriver en C en passant par A.

Partie B - Étude d'une variable aléatoire

1. A(0 ; 5) B(1 ;4) C(2 ;3) D (3,2) E(4 ;1) F(5 ; 0)

2. On a une succession de 5 expériences aléatoires identiques et indépendantes (le promeneur se déplace soit vers le Nord soit vers l'Est)

Chaque expérience a deux issues :

réussite : le promeneur va vers le Nord avec une probabilité $p = \frac{2}{3}$,

échec : le promeneur ne va pas vers le Nord avec une probabilité $q = 1 - p$ donc $q = \frac{1}{3}$,

donc la variable aléatoire X qui à tout chemin suivi par le promeneur associe le nombre de fois où il va vers le Nord, suit une loi binomiale de paramètres $\left(5 ; \frac{2}{3}\right)$.

3. le promeneur arrive en A s'il se déplace une seule fois vers le Nord donc $p(X = 1) = \binom{5}{1} \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^4$ soit environ 0,041