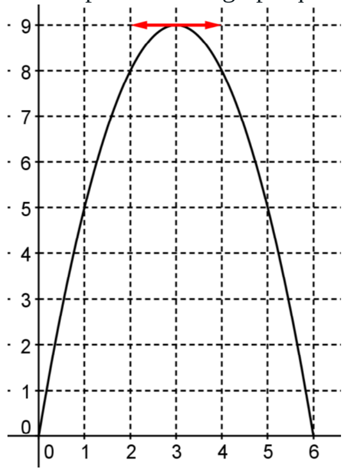
Soit la fonction définie par $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ dont la représentation graphique C est donnée ci-dessous :



a. Soit les affirmations suivantes :

« C passe par le point O » « A(3 ; 9) appartient à C » « la tangente en A à C est horizontale »	« $f(x_A) = y_A$ » « $f'(3) = 0$ » « $f(0) = 0$ »	« $c = 0$ » « $9\,a + 3\,b + c = 9$ » « $6\,a + b = 0$ »

Recopier et relier entre elles les conditions qui se correspondent.

b. Ecrire un système (S) vérifié par *a* et *b*.

c. Déterminer les matrices A, X et B pour lesquelles A X = B est équivalent (S).

d. A l'aide de la calculatrice, déterminer X, puis conclure.

CORRECTION

1. $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ donc $f'(x) = 2\,a\,x + b$

« C passe par le point O » $\Leftrightarrow f(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$

« A(3 ; 9) appartient à C » $\Leftrightarrow$ « $f(X_A) = Y_A$ » $\Leftrightarrow$ « $9\,a + 3\,b + c = 9$ »

« la tangente en A à C est horizontale » $\Leftrightarrow$ « $f'(3) = 0$ » $\Leftrightarrow$ « $6\,a + b = 0$ »

b. a, b, c vérifient le système : $\begin{cases} 9\,a + 3b + c = 9 \\ 6\,a + b \quad\quad = 0 \\ \quad\quad\quad c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9\,a + 3\,b = 9 \\ 6\,a + b \quad = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\,a + b = 3 \\ 6\,a + b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$

c. Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors le système (S) est équivalent à A X = B

d. A la calculette : $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A\,X = B \Leftrightarrow A^{-1}\,A\,X = A^{-1}\,B \Leftrightarrow X = A^{-1}\,B \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f(x) = -x^2 + 6\,x$