Une maladie est apparue dans le cheptel bovin d'un pays. Elle touche 5 $^0/_{00}$ (5 pour mille) de ce cheptel.
On choisit, au hasard, *n* bovins du cheptel et l'on désigne par X la variable aléatoire définie par le nombre de malades parmi ces *n* animaux.

a) Si $n = 10$, calculez à 10^{-3} près, les probabilités suivantes : $P(X = 0)$, $P(X \geq 1)$.

b) Déterminez *n* pour que l'espérance mathématique de X soit égale à 0,10.

Des études statistiques ont montré que la probabilité pour un animal d'avoir un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est 0,8 et que celle d'avoir un test négatif sachant qu'il n'est pas atteint par la maladie est 0,9.
On note :
T l'événement "avoir un test positif à cette maladie"
M l'événement "être malade"
$\overline{M}$ l'événement contraire de l'événement M

a) Montrez que : $T = (M \cap T) \cup (\overline{M} \cap T)$

b) Calculez la probabilité pour un animal d'avoir un test positif à cette maladie

c) Calculez la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif.

On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible.
Que peut-on conclure sur la fiabilité du test ?

CORRECTION

1. *a.* La probabilité qu'un bovin soit atteint par la maladie est 0,005.
Les tirages sont effectués avec remises et les épreuves successives sont indépendantes donc X suit une loi binomiale de paramètres (*n* ; 0,005).
$p(X = 0) = 0{,}995^{10}$
soit $p(X = 0) \approx 0{,}951$
$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0{,}995^{10} \approx 0{,}049$

b. $E(X) = n \times p = n \times 0{,}005 = 0{,}10$ donc $n = 20$

2. *a.* Lorsque le test est positif, il n'y a que deux alternatives :
- le test est positif et l'animal est malade $(M \cap T)$
- le test est positif et l'animal n'est pas malade $(T \cap \overline{M})$

donc $T = (M \cap T) \cup (T \cap \overline{M})$

b. $p(T / M) = 0{,}8$
$p(M) = 0{,}005$ donc $p(M \cap T) = p(T / M) \times p(M) = 0{,}8 \times 0{,}005$
$p(M \cap T) = 0{,}004$

$p(\overline{T} / \overline{M}) = 0{,}9$ donc $p(T / \overline{M}) = 0{,}1$
$p(\overline{M}) = 1 - p(M) = 0{,}995$
$p(T \cap \overline{M}) = p(T / \overline{M}) \times p(\overline{M}) = 0{,}1 \times 0{,}995$
$p(T \cap \overline{M}) = 0{,}0995$

$p(T) = p(T \cap M) + p(T \cap \overline{M}) = 0{,}1035$

c. $p(M / T) = \dfrac{p(M \cap T)}{p(T)} = \dfrac{0{,}004}{0{,}1035} = \dfrac{8}{207}$ Le test n'est pas bon.