On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{2u_n + 1}$.

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

1. *a.* Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
b. Vérifier que si n est l'un des entiers 0, 1, 2, 3, 4 alors $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.

c. Établir que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - 1 = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$.

d. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a. Établir que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$.

b. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

c. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$.
Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (u_n).

CORRECTION

1. *a. b.*

n	1	2	3	4
u_n	0,8	1,08	0,98	1,01
$u_n - 1$	– 0,2	0,08	– 0,02	0,01
signe de $u_n - 1$	–	+	–	+
signe de $(-1)^n$	–	+	–	+

si n est l'un des entiers 0, 1, 2, 3, 4 alors $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.

c. $u_{n+1} - 1 = \dfrac{u_n + 2}{2u_n + 1} - 1 = \dfrac{u_n + 2 - (2u_n + 1)}{2u_n + 1} = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - 1 = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$.

d. <u>Initialisation :</u> $u_0 - 1 = 2 - 1 = 1$ donc $u_0 - 1 > 0$
$(-1)^0 = 1$ donc $u_0 - 1$ et $(-1)^0$ ont le même signe, la propriété est initialisée pour $n = 0$

<u>Hérédité :</u> montrons pour tout n de $\mathbb{N}$, que si $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$ alors $u_{n+1} - 1$ a le même signe que $(-1)^{n+1}$.

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - 1 = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1} = -\dfrac{u_n - 1}{2u_n + 1}$

$u_n > 0$ donc $2u_n + 1 > 0$ donc $u_{n+1} - 1$ a le même signe que $-(u_n - 1)$
$u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$ alors $-u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^{n+1}$ donc $u_{n+1} - 1$ a le même signe que $(-1)^{n+1}$.
La propriété est héréditaire donc pour tout entier naturel n, $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.

2. *a.* $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1}$

$u_{n+1} - 1 = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$ et $u_{n+1} + 1 = \dfrac{u_n + 2}{2u_n + 1} + 1 = \dfrac{u_n + 2 + (2u_n + 1)}{2u_n + 1} = \dfrac{3u_n + 3}{2u_n + 1}$

$v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = (u_{n+1} - 1) \times \dfrac{1}{u_{n+1} + 1} = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1} \times \dfrac{2u_n + 1}{3u_n + 3}$ donc $v_{n+1} = \dfrac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$.

b. $v_{n+1} = \dfrac{-u_n + 1}{3u_n + 3} = \dfrac{-(u_n - 1)}{3(u_n + 1)} = -\dfrac{1}{3} \times \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$ donc $v_{n+1} = -\dfrac{1}{3}\, v_n$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

$v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \dfrac{2-1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$ de premier terme $\dfrac{1}{3}$ donc $v_n = v_0 \times q^n = \dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ ce qui peut aussi s'écrire $v_n = -\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$ ou encore $v_n = -\dfrac{1}{(-3)^{n+1}}$

c. $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n} = \dfrac{1 - \dfrac{1}{(-3)^{n+1}}}{1 + \dfrac{1}{(-3)^{n+1}}}$ donc pour tout entier n, $u_n = \dfrac{(-3)^{n+1} - 1}{(-3)^{n+1} + 1}$

$v_n = v_0 \times q^n$ et $-1 < q < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ or $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.