Asie juin 2009

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

Une entreprise fait fabriquer des paires de chaussette auprès de trois fournisseurs F_1, F_2, F_3.
Dans l'entreprise, toutes ces paires de chaussettes sont regroupées dans un stock unique.
La moitié des paires de chaussettes est fabriquée par le fournisseur F_1, le tiers par le fournisseur F_2 et le reste par le fournisseur F_3.
Une étude statistique *a* montré que

- 5 % des paires de chaussette fabriquées par le fournisseur F_1 ont un défaut ;
- 1,5 % des paires de chaussette fabriquées par le fournisseur F_2 ont un défaut ;
- sur l'ensemble du stock, 3,5 % des paires de chaussette ont un défaut.

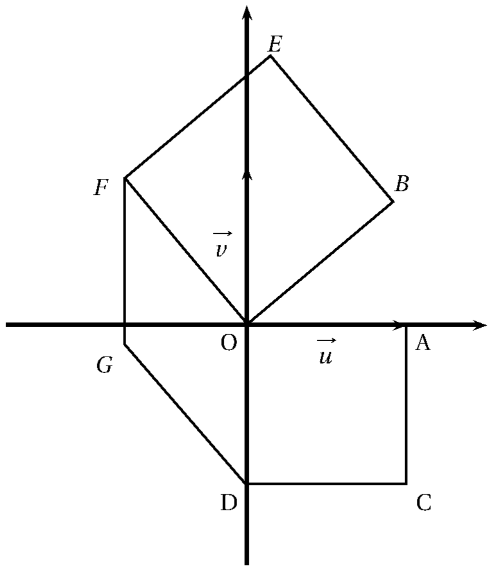
1. On prélève au hasard une paire de chaussettes dans le stock de l'entreprise.
On considère les évènements F_1, F_2, F_3 et D suivants :

- F_1 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur F_1 » ;
- F_2 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur F_2 » ;
- F_3 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur F_3 » ;
- D : « La paire de chaussettes prélevée présente un défaut ».

a. Traduire en termes de probabilités les données de l'énoncé en utilisant les évènements précédents.
Dans la suite, on pourra utiliser un arbre pondéré associé à cet expérience.
b. Calculer la probabilité qu'une paire de chaussettes prélevée soit fabriquée par le fournisseur F_1 et présente un défaut.
c. Calculer la probabilité de l'évènement $F_2 \cap D$.
d. En déduire la probabilité de l'évènement $F_3 \cap D$.
e. Sachant que la paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur F_3, quelle est la probabilité qu'elle présente un défaut ?
2. L'entreprise conditionne les paires de chaussettes par lots de six paires.
On considère que le stock est suffisamment grand pour assimiler le choix des six paires de chaussettes à des tirages indépendants, successifs avec remise.
a. Calculer la probabilité que deux paires de chaussettes exactement d'un lot présentent un défaut ; on donnera un résultat arrondi au millième.
b. Démontrer que la probabilité, arrondie au millième, qu'au plus une paire de chaussettes d'un lot présente un défaut est égale à 0,983.

EXERCICE 2 5 points Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On place dans ce repère, les points A d'affixe 1, B d'affixe *b* où *b* est un nombre complexe dont la partie imaginaire est strictement positive.
On construit à l'extérieur du triangle OAB, les carrés directs ODCA et OBEF comme indiqué sur la figure ci-contre.



1. Déterminer les affixes *c* et *d* des points C et D.
2. On note *r* la rotation de centre O et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$.
a. Déterminer l'écriture complexe de *r* .
b. En déduire que l'affixe *f* du point F est i *b*.
c. Déterminer l'affixe *e* du point E.
3. On appelle G le point tel que le quadrilatère OFGD soit un parallélogramme.
Démontrer que l'affixe *g* du point G est égal à i $(b - 1)$.
4. Démontrer que $\dfrac{e-g}{c-g} = \text{i}$ et en déduire que le triangle EGC est rectangle et isocèle.

EXERCICE 2 5 points Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On se propose, dans cette question, de déterminer tous les entiers relatifs N tels que $\begin{cases} N \equiv 5\ (13) \\ N \equiv 1\ (17) \end{cases}$.
a. Vérifier que 239 est solution de ce système.
b. Soit N un entier relatif solution de ce système. Démontrer que N peut s'écrire sous la forme N = 1 + 17 *x* = 5 + 13 *y* où *x* et *y* sont deux entiers relatifs vérifiant la relation $17x - 13y = 4$.
c. Résoudre l'équation $17x - 13y = 4$ où *x* et *y* sont des entiers relatifs.
d. En déduire qu'il existe un entier relatif *k* tel que $N = 18 + 221k$.
e. Démontrer l'équivalence entre $N \equiv 18\ (221)$ et $\begin{cases} N \equiv 5\ (13) \\ N \equiv 1\ (17) \end{cases}$.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
a. Existe-t-il un entier naturel *k* tel que $10^k \equiv 1\ (17)$?
b. Existe-t-il un entier naturel *l* tel que $10^l \equiv 18\ (221)$?

EXERCICE 3 6 points
Commun à tous les candidats
On considère l'équation notée (E) : $\ln x = -x$.
Le but de l'exercice est de prouver que l'équation (E), admet une solution unique notée α appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et d'utiliser une suite convergente pour en obtenir un encadrement.

Partie A : existence et unicité de la solution
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x + \ln x$.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
3. Vérifier que : $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$.

Partie B : encadrement de la solution α
On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{4x - \ln x}{5}$.

1. Étude de quelques propriétés de la fonction g.
a. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
b. En déduire que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$, $g(x)$ appartient à cet intervalle.
c. Démontrer qu'un nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $g(x) = x$.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = g(u_n)$.
a. En utilisant le sens de variation de la fonction g, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
b. En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

3. Recherche d'une valeur approchée de α
a. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_{10}, arrondie à la sixième décimale.
b. On admet que u_{10} est une valeur approchée par défaut à 5×10^{-4} près de α.
En déduire un encadrement de α sous la forme $u \leq \alpha \leq v$ où u et v sont deux décimaux écrits avec trois décimales.

EXERCICE 4 4 points Commun à tous les candidats
L'exercice comporte quatre questions indépendantes. Pour chacune d'entre elles, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte. Il s'agit de déterminer la bonne réponse et de justifier le choix ainsi effectué.
Un choix non justifié ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Question 1
La solution f de l'équation différentielle $y' + 2y = 6$ qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$ est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :
Réponse (1) : $f(x) = -2\,e^{-2x} + 3$ Réponse (2) : $f(x) = -2\,e^{2x} + 3$ Réponse (3) : $f(x) = -2\,e^{-2x} - 3$

2. Question 2
On considère un triangle ABC et on note I le point tel que $2\,\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.
Les points G, I et A sont alignés lorsque G est le barycentre du système :
Réponse (1) : {(A, 1), (C, 2)} Réponse (2) : {(A, 1), (B, 2), (C, 2)} Réponse (3) : {(A, 1), (B, 2), (C, 1)}

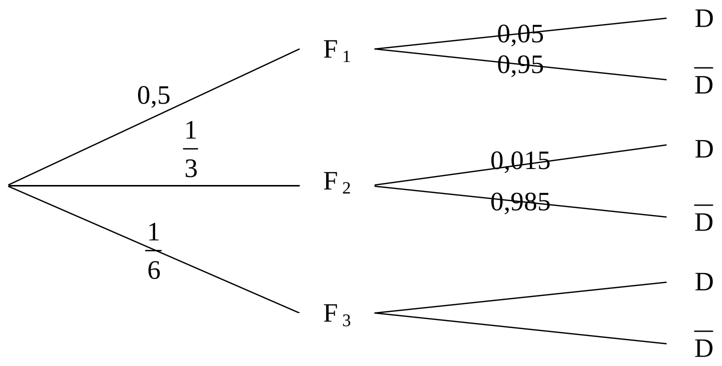
3. Question 3
Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le plan P d'équation cartésienne : $x - 3y + 2z = 5$ et le point A(2 ; 3 ; − 1).
Le projeté orthogonal du point A sur le plan P est le point :
Réponse (1) : $H_1(3\,;-1\,;4)$ Réponse (2) : $H_2(4\,;-3\,;-4)$ Réponse (3) : $H_3(3\,;0\,;1)$

4. Question 4
La valeur moyenne de la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ est égale à :
Réponse (1) : $-\dfrac{\pi}{2}$ Réponse (2) : $\dfrac{\pi}{4}$ Réponse (3) : $\dfrac{\pi}{2}$.

CORRECTION

EXERCICE 1 **5 points** **Commun à tous les candidats**

a. $p(\text{F}_1) = \dfrac{1}{2}$, $p(\text{F}_2) = \dfrac{1}{3}$, $p(\text{F}_3) = 1 - p(\text{F}_1) - p(\text{F}_2) = 1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$; $p(\text{D}) = 0{,}035$



b. $p(\text{F}_1 \cap \text{D}) = 0{,}5 \times 0{,}05 = 0{,}025$

c. $p(\text{F}_2 \cap \text{D}) = \dfrac{1}{3} \times 0{,}015 = 0{,}005$

d. $p(\text{D}) = p(\text{F}_1 \cap \text{D}) + p(\text{F}_2 \cap \text{D}) + p(\text{F}_3 \cap \text{D})$ donc $0{,}035 = 0{,}025 + 0{,}005 + p(\text{F}_3 \cap \text{D})$
$p(\text{F}_2 \cap \text{D}) = 0{,}035 - 0{,}030 = 0{,}005$.

e. $p_{\text{F}_3}(\text{D}) = \dfrac{p(\text{F}_3 \cap \text{D})}{p(\text{F}_3)} = \dfrac{0{,}005}{\frac{1}{6}}$ donc $p_{\text{F}_3}(\text{D}) = 0{,}030$

2. On a une succession de 6 expériences aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elle a deux issues :
succès : la paire de chaussette présente un défaut ($p = 0{,}035$)
échec : la paire de chaussette ne présente pas de défaut ($q = 1 - p = 0{,}965$)
Soit X la variable aléatoire mesurant le nombre de paires de chaussettes présentant un défaut dans un lot, X suit une loi binomiale de paramètres (6 ; 0,035).

a. $p(\text{X} = 2) = 0{,}016$

b. $p(\text{X} \leq 1) = p(\text{X} = 0) + p(\text{X} = 1) = 0{,}8075 + 0{,}1757$
La probabilité, arrondie au millième, qu'au plus une paire de chaussettes d'un lot présente un défaut est égale à 0,983.

EXERCICE 2 **5 points** **Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

1. D est l'image de A par la rotation de centre O d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ donc $d = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{2}} a = -\text{i}$

Le quadrilatère OACD est un carré donc $\overrightarrow{\text{OC}} = \overrightarrow{\text{OA}} + \overrightarrow{\text{OD}}$ donc $c = a + d = 1 - \text{i}$

2. *a.* la rotation de centre O et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$ a pour écriture complexe : $z' = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}} z$

b. F est l'image de B par la rotation de centre O d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ donc $f = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}} b = \text{i}\, b$

c. Le quadrilatère OBEF est un carré donc $\overrightarrow{\text{OE}} = \overrightarrow{\text{OB}} + \overrightarrow{\text{OF}}$ donc $e = b + f = b\,(1 + \text{i})$.

3. Le quadrilatère OFGD soit un parallélogramme donc $\overrightarrow{\text{OG}} = \overrightarrow{\text{OD}} + \overrightarrow{\text{OF}}$ donc $g = -\text{i} + \text{i}\, b = \text{i}\,(b - 1)$.

4. $e - g = b\,(1 + \text{i}) - \text{i}\,(b - 1) = b + \text{i}$; $c - g = 1 - \text{i} - \text{i}\,(b - 1) = 1 - \text{i}\, b$ or $\text{i}\,(1 - \text{i}\, b) = \text{i} + b = e - g$ donc $\dfrac{e - g}{c - g} = \text{i}$

$\dfrac{e - g}{c - g} = \text{i}$ donc $\left|\dfrac{e - g}{c - g}\right| = 1$ et $\arg\left(\dfrac{e - g}{c - g}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) donc EG = CG et $(\overrightarrow{\text{GC}}\,;\overrightarrow{\text{GE}}) = \dfrac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)
le triangle EGC est rectangle et isocèle en G.

EXERCICE 2 5 points Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. *a.* $239 = 13 \times 18 + 5$ et $239 = 17 \times 14 + 1$ donc $\begin{cases} 239 \equiv 5\,(13) \\ 239 \equiv 1\,(17) \end{cases}$ donc 239 est solution du système $\begin{cases} N \equiv 5\,(13) \\ N \equiv 1\,(17) \end{cases}$.

b. $N \equiv 5\ (13) \Leftrightarrow$ il existe un entier relatif y tel que $N = 13\,y + 5$
$N \equiv 1\ (17) \Leftrightarrow$ il existe un entier relatif x tel que $N = 17\,x + 1$
$\begin{cases} N \equiv 5\,(13) \\ N \equiv 1\,(17) \end{cases} \Leftrightarrow$ N peut s'écrire sous la forme $N = 1 + 17\,x = 5 + 13\,y$ où x et y sont deux entiers relatifs et $13\,y + 5 = 17\,x + 1$
$\Leftrightarrow$ N peut s'écrire sous la forme $N = 1 + 17\,x = 5 + 13\,y$ où x et y sont deux entiers relatifs vérifiant la relation $17\,x - 13\,y = 4$.

c. $17 \times 1 - 13 \times 1 = 4$ donc $(1\,;\,1)$ est solution de l'équation $17\,x - 13\,y = 4$
Par différence membre à membre : $17\,(x - 1) - 13\,(y - 1) = 0$ soit $17\,(x - 1) = 13\,(y - 1)$
donc 17 divise $13\,(y - 1)$ or 17 et 13 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 17 divise $y - 1$
Il existe donc un entier relatif k tel que $y - 1 = 17\,k$ donc en remplaçant dans $17\,(x - 1) = 13\,(y - 1)$ alors $x - 1 = 13\,k$
donc $x = 13\,k + 1$ et $y = 17\,k + 1$ avec k entier relatif.

Vérification $17\,(13\,k + 1) - 13\,(17\,k + 1) = 4$ donc les solutions de l'équation $17\,x - 13\,y = 4$ sont les couples $(13\,k + 1\,;\,17\,k + 1)$ avec k entier relatif

d. N solution de $\begin{cases} N \equiv 5\,(13) \\ N \equiv 1\,(17) \end{cases}$ donc N peut s'écrire sous la forme $N = 1 + 17\,x = 5 + 13\,y$ où x et y sont deux entiers relatifs vérifiant la relation $17\,x - 13\,y = 4$
donc N peut s'écrire sous la forme $N = 1 + 17\,x = 5 + 13\,y$ où x et y sont deux entiers relatifs tels que $x = 13\,k + 1$ et $y = 17\,k + 1$ avec k entier relatif
donc $N = 1 + 17\,(13\,k + 1)$ avec k entier relatif
donc $N = 18 + 221\,k$ avec k entier relatif.

e. N solution de $\begin{cases} N \equiv 5\,(13) \\ N \equiv 1\,(17) \end{cases}$ donc $N = 18 + 221\,k$ avec k entier relatif donc $N \equiv 18\ (221)$
Réciproquement si $N \equiv 18\ (221)$ alors il existe un entier relatif k tel que $N = 18 + 221\,k$
$221 = 13 \times 17$ donc si $N \equiv 18\ (221)$ alors $N \equiv 18\ (13)$ et $N \equiv 18\ (17)$
or $18 \equiv 5\ (13)$ et $18 \equiv 1\ (17)$ donc $\begin{cases} N \equiv 5\,(13) \\ N \equiv 1\,(17) \end{cases}$.
La réciproque est prouvée donc $N \equiv 18\ (221) \Leftrightarrow \begin{cases} N \equiv 5\,(13) \\ N \equiv 1\,(17) \end{cases}$.

2. *a.* 10 et 17 sont premiers entre eux et 17 est un nombre premier donc d'après le petit théorème de Fermat, $10^{17-1} \equiv 1\ (17)$ soit $10^{16} \equiv 1\ (17)$

b. 10 et 13 sont premiers entre eux et 13 est un nombre premier donc d'après le petit théorème de Fermat, $10^{13-1} \equiv 1\ (13)$ soit $10^{12} \equiv 1\ (13)$ or $12 \times 4 = 48$ donc $(10^{12})^4 \equiv 1\ (13)$
$10^{16} \equiv 1\ (13)$ or $16 \times 3 = 48$ donc $(10^{16})^3 \equiv 1\ (17)$
donc 13 divise $10^{48} - 1$ et 17 divise $10^{48} - 1$; 13 et 17 sont premiers entre eux donc 13×17 divise $10^{48} - 1$
donc $10^{48} \equiv 1\ (221)$

EXERCICE 3 6 points Commun à tous les candidats

Partie A : existence et unicité de la solution

1. f est définie dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$, $x > 0$ donc $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

2. $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

f est une fonction continue strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, $g(]0\,;+\infty[) =]-\infty\,;+\infty[$

$0 \in]-\infty\,;+\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

3. $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0{,}5 + \ln 0{,}5$ donc $f\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0$ et $f(1) = 1 + \ln 1 = 1$ de plus f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ donc $\dfrac{1}{2} \le \alpha \le 1$.

Partie B : encadrement de la solution α

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{4x - \ln x}{5}$.

1. *a.* g est définie dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $g'(x) = \dfrac{1}{5}\left(4 - \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{4x - 1}{5x}$

si $x > \dfrac{1}{4}$ alors $g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{4}\,;+\infty\right[$

si $0 < x < \dfrac{1}{4}$ alors $g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $\left]0\,;\dfrac{1}{4}\right]$

b. g est strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$ donc pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$, $g(0{,}5) \le g(x) \le g(1)$

$g(0{,}5) \approx 0{,}54$ et $g(1) = 1$ donc pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$, $0{,}5 \le g(x) \le 1$.

c. Un nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$ est solution de l'équation (E) $\Leftrightarrow x \in]0\,;+\infty[$ et $\ln x = -x$

$\Leftrightarrow x \in]0\,;+\infty[$ et $\dfrac{4x - \ln x}{5} = \dfrac{4x - (-x)}{5}$ $\Leftrightarrow x \in]0\,;+\infty[$ et $\dfrac{4x - \ln x}{5} = x \Leftrightarrow g(x) = x$.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = g(u_n)$.

a. $u_0 = \dfrac{1}{2}$ or pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$, $0{,}5 \le g(x) \le 1$ donc $0{,}5 \le g(0{,}5) \le 1$

donc $\dfrac{1}{2} \le u_0 \le u_1 \le 1$. La propriété est vraie pour $n = 0$.

Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, la propriété est héréditaire donc que si $\dfrac{1}{2} \le u_n \le u_{n+1} \le 1$ alors $\dfrac{1}{2} \le u_{n+1} \le u_{n+2} \le 1$

$\dfrac{1}{2} \le u_n \le u_{n+1} \le 1$ or g est strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{4}\,;+\infty\right[$ donc $g(0{,}5) \le g(u_n) \le g(u_{n+1}) \le g(1)$

pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$, $0{,}5 \le g(x) \le 1$ donc $0{,}5 \le g(u_n) \le g(u_{n+1}) \le 1$

soit $\dfrac{1}{2} \le u_{n+1} \le u_{n+2} \le 1$

Pour tout n de $\mathbb{N}$, la propriété est héréditaire donc est vraie

b. La suite (u_n) est croissante majorée par 1 donc converge.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$, $0{,}5 \le u_n \le 1$ et g est continue sur $\left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$ donc la limite de la suite (u_n) est solution de $g(x) = x$

donc la suite (u_n) converge vers α..

3. *a.* À l'aide de la calculatrice, $u_{10} \approx 0{,}567\,124$

b. u_{10} est une valeur approchée par défaut à 5×10^{-4} près de α donc $u_{10} \le \alpha \le u_{10} + 0{,}000\,5$ or $u_{10} + 0{,}000\,5 \approx 0{,}567\,624$ donc $0{,}567 \le \alpha \le 0{,}568$

EXERCICE 4 **4 points** **Commun à tous les candidats**

1. Réponse (1) vraie

$y' = -2y + 6$ admet pour solution les fonctions de la forme $f(x) = C\,e^{-2x} + 3$

$f(0) = 1$ donc $C + 3 = 1$ donc $C = -2$ donc $f(x) = -2\,e^{-2x} + 3$

Une autre justification aurait consisté à dériver f, $f'(x) = 4\,e^{-2x}$ donc $f'(x) + 2f(x) = 6$ donc Réponse (1) vraie

2. Réponse (3) vraie

$2\,\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ donc I est le barycentre du système {(B, 2), (C, 1)} donc si G est le barycentre du système {(A, 1), (B, 2), (C, 1)} alors il est aussi barycentre du système : {(A, 1), (I, 3)} donc G, I et A sont alignés

3. Réponse (2) vraie

$H_2(4\,;-3\,;-4)$ H_2 appartient au plan P : $4 - 3 \times (-3) + 2 \times (-4) = 5$ et $\overrightarrow{AH}$ a pour coordonnées $(2\,;-6\,;3)$

Soit le vecteur $\vec{n}\,(1\,;-3\,;2)$ normal au plan (P), $\overrightarrow{AH} = 2\vec{n}$; $\overrightarrow{AH}$ est colinéaire à $\vec{n}$ donc la droite (AH) est orthogonale au plan (P)

4. Réponse (3) vraie

La valeur moyenne de la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ est égale à $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

Pour tout x de [0 ; 1], $0{,}5 \leq \dfrac{1}{1+x^2} \leq 1$ donc $0{,}5 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \leq 1$

Parmi les réponses proposées, seul $\dfrac{\pi}{2}$ répond à cet encadrement.