Exercice 45 feuille 17 -

Méthode : diagonaliser A, de sorte que l'on puisse calculer facilement A^n et sa trace.

On calcule le polynôme caractéristique : $\chi_A(x) = (x-4)^2\,(x-2)$. Une valeur propre double !
Puis on détermine les sous-espaces propres :

(1) on résout AX = 4X , avec $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$; on obtient $X = \begin{bmatrix} x \\ -x \\ x \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$: la dimension du sous-espace propre est 1 et la valeur propre double : A n'est pas diagonalisable.

(2) et l'équation : AX = 2 donne : $X = x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Aie! A n'est pas diagonalisable ; pas grave, on ajoute un 3° vecteur , par exemple (pour avoir une certaine symétrie) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, mais on peut préférer $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ et bien d'autres encore !

La matrice de passage est : $P := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Alors $A = PTP^{-1}$; par définition des deux premiers vecteurs, $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 4 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. Remarque : si on faisait le calcul, par exemple avec Python, on obtiendrait en fait : $T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$;
mais ce n'est pas utile ! A et T sont semblables : tr(T) = tr(A) implique : c = 4.
Et pour tout naturel n, $A^n = PT^n\,P^{-1}$: donc A^n est semblable à une matrice triangulaire supérieure dont les termes diagonaux sont 2^n, 4^n et 4^n ; $\mathrm{tr}(A^n) = 2^n + 2.4^n$. Puisque $\mathrm{tr}(A^n) \sim 2.4^n$ et que le rayon de convergence de la série entière $\Sigma\,(4z)^n$ est ¼, le rayon de convergence de $\Sigma\,\mathrm{tr}(A^n)$ est ¼.